LA ECUACIÓN DEL CALOR. PRINCIPIO DEL MÁXIMO-MÍNIMO [1]

En la página web

https://www.ugr.es/ acanada/docencia/docencia.htm

encontrarás información adicional sobre el contenido de este archivo y la ecuación del calor

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es $C^1[a,b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. Si $x_0 = b$, entonces $f'(x_0^-) \geq 0$. Si $x_0 = b$, muestra dos ejemplos donde se cumpla que $f'(x_0^-) = 0$ y $f'(x_0^-) > 0$ son posibles.

   EjercicioPMM1: pruébese la afirmación anterior

   Solución de PMM1:

   Si $x_0 \in (a,b)$, entonces

   $$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$$

   Claramente $f'(x_0^+) \leq 0,\ f'(x_0^-) \geq 0$, luego $f'(x_0) = 0$.

   La función $f : [-1,0] \to \mathbb{R},\ x \to -x^2$, alcanza su máximo en $x_0 = 0$ y $f'(0^-) = 0$.

   La función $f : [-\pi/2, 0] \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{sen} x$ alcanza su máximo en $x_0 = 0$ y $f'(0^-) = 1$.

2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es $C^2[a,b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a,b)$, entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

   Ejercicio PMM2: pruébese la afirmación anterior

   Solución de PMM2:

   Que $f'(x_0) = 0$, se ha visto en el ejercicio anterior. Por otra parte, si $f''(x_0) > 0$, entonces la función $f'(x)$ es estrictamente creciente en un entorno de x_0. Por tanto $\exists\ \delta > 0$, tal que $f'(x) < 0,\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0)$

[1] A. Cañada, Abril 2020

y $f'(x) > 0, \ \forall \ x \in (x_0, x_0+\delta)$. La conclusión es que f es estrictamente decreciente en $(x_0-\delta, x_0]$ y estrictamente creciente en $[x_0, x_0+\delta)$. Esto contradice el hecho de que x_0 es máximo de f en (a,b).

La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{C}$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

El principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor se enuncia a continuación. *Se ruega encarecidamente al alumno que previamente se familiarice con el concepto de frontera parabólica, examinando detalladamente el archivo que se adjunta sobre ello.*

Teorema 1.. *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, \ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifica*

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0, \ \forall \ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} \ u = \max_{\partial_1 \Omega} \ u, \quad \min_{\overline{\Omega}} \ u = \min_{\partial_1 \Omega} \ u, \tag{2}$$

donde $\partial_1 \Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_1(\Omega) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega, \ 0 \leq t \leq T\} \ \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in \omega, \ t = 0\}.$$

NOTAS. La notación $u \in C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ significa que la función u es continua en $\overline{\Omega}$, y que fijado $t, \ 0 < t < T$, la función $u(x,t)$, como función de $x \in \omega$ es C^2 y que, fijado $x, \ x \in \omega$, la función $u(x,t)$, como función de $t \in (0,T)$ es C^1. Por otra parte, $\Delta_x u(x,t)$ denota el laplaciano de la función $u(x,t)$, respecto de $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \omega$.

Demostración. Demostremos, por ejemplo, el principio del máximo (el principio del mínimo se probaría usando el principio del máximo para la función $-u$ en lugar de u).

Se recomienda otra vez al alumno que, previamente, se familiarice con las situaciones:

1. $n = 1,\ \omega = (a, b)$,
2. $n = 2$, ω un círculo arbitrario.

con el objeto de familiarizarse con la noción de frontera parabólica. Véase para ello el archivo adjunto.

La demostración consta de varias etapas:

1. Primero se considera la situación donde la variable t se restringe a un subintervalo de $(0, T)$, concretamente $(0, T - \varepsilon)$, y se tiene una desigualdad estricta negativa en (1). Entonces las hipótesis son: el dominio

$$\Omega_\varepsilon = \{(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \le T - \varepsilon\}.$$

y la desigualdad estricta

$$u_t(x, t) - \Delta_x u(x, t) < 0,\ \ \forall\ (x, t) \in \Omega_\varepsilon$$

En este caso, sea $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} u$.

Ejercicio PMM3: pruébese la existencia de (x_0, t_0) verificando la propiedad anterior

Solución de PMM3

$\overline{\Omega_\varepsilon}$ es cerrado y acotado, luego es compacto. La función u es continua en $\overline{\Omega_\varepsilon}$.

Entonces necesariamente $(x_0, t_0) \in \partial_1 \Omega_\varepsilon$. En efecto, si no fuese así, caben dos posibilidades

a) $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$. Entonces se tiene (por favor, úsense los conocimientos previos necesarios proporcionados al principio de este archivo)

$$u_t(x_0, t_0) = 0,\ \ u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \le 0,\ \forall\ i,\ 1 \le i \le n.$$

Por tanto,

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \ge 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (1).

b) (x_0, t_0) es tal que $x_0 \in \omega$ y $t_0 = T - \varepsilon$. Entonces se tiene (por favor, úsense de nuevo los conocimientos previos necesarios proporcionados al principio de este archivo)

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \ \forall \ i \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, de nuevo tenemos

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (1).

En resumen, en esta primera etapa hemos probado que si tenemos una desigualdad estricta negativa en (1) y el dominio Ω se cambia por Ω_ε, entonces

$$\max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} \ u = \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} \ u.$$

2. En una segunda etapa, hacemos tender ε a cero por la derecha, obteniendo que, si tenemos una desigualdad estricta negativa en (1), entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} \ u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} \ u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} \ u = \max_{\partial_1 \Omega} \ u$$

3. Para el caso en el que en (1) se tiene una igualdad, se considera la función auxiliar $v^k(x,t) = u(x,t) - kt$, con k positivo. Entonces

$$v_t^k - \Delta_x v^k = u_t - \Delta_x u - k = -k < 0.$$

Por lo anterior, tendremos que

$$\max_{\overline{\Omega}} \ v^k = \max_{\partial_1 \Omega} \ v^k.$$

Si ahora se hace tender k a cero por la derecha, tendremos (2).

El principio del máximo-mínimo se puede usar para probar que el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi,
\end{aligned} \qquad (C1)$$

tiene solución única.

El interés por este problema proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: Tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada (por eso la ecuación del calor que aparece es homogénea). Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.

Si designamos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega)$$

y que satisface (C1) puntualmente.

Ejercicio PMM4: Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor pruébese que (C1) tiene, a lo sumo, una solución.

Solución de PMM4:

Si u y v son soluciones de (C1), la función $w = u - v$ verifica

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
w(0,t) &= w(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
w(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi,
\end{aligned} \qquad (C11)$$

Observemos que w es solución de la ecuación del calor y que $w \equiv 0$ en la frontera parabólica de $(0,\pi) \times (0,T)$. Por el principio del máximo-mínimo, $w \equiv 0$ en $[0,\pi] \times [0,T]$. Por tanto $u \equiv v$ en $[0,\pi] \times [0,T]$.

Finalmente, dos ejercicios que no son tan triviales.

Ejercicio PMM5 : Sean las funciones u y v, respectivamente, soluciones de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + h(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ u(0,t) = a(t), \qquad & u(\pi,t) = b(t), \qquad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C_u}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t} + h(x,t), \quad 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ v(0,t) = c(t), \qquad & v(\pi,t) = d(t), \qquad 0 \le t \le T, \\ v(x,0) &= g(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C_v}$$

con $a(t) \le c(t), \ 0 \le t \le T$, $b(t) \le d(t), \ 0 \le t \le T$, $f(x) \le g(x), \ 0 \le x \le \pi$.

Pruébese que $u(x,t) \le v(x,t), \ 0 \le x \le \pi, \ 0 \le t \le T$.

Solución de PMM5:

Si u y v son soluciones de (C_u) y (C_v), respectivamente, entonces la función $w = u - v$ verifica

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ w(0,t) = a(t) - c(t) \le 0, \qquad & w(\pi,t) = b(t) - d(t) \le 0, \quad 0 \le t \le T, \\ w(x,0) &= f(x) - g(x) \le 0, \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C_w}$$

De las hipótesis sobre las funciones a, b, c, d, f, g se deduce trivialmente que $w(x,t) \le 0, \ \forall (x,t)$ en la frontera parabólica de $(0,\pi) \times (0,T)$. Ahora bien, w es solución de la ecuación del calor. Por el principio del máximo, $w(x,t) \le 0, \ \forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]$. Por tanto, $u(x,t) \le v(x,t), \ \forall (x,t) \in [0,\pi] \times [0,T]$.

Ejercicio PMM6 Sean u y v dos soluciones de la ecuación del calor no homogénea

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + h(x,t), 0 < x < \pi, \ 0 < t < T$$

tales que $|u(x,t)| \leq v(x,t)$, para cada (x,t) perteneciente a la frontera parabólica de $\Omega = (0,\pi) \times (0,T)$.

Demuéstrese que $|u(x,t)| \leq v(x,t)$, para cada $(x,t) \in \overline{\Omega}$.

Observación importante, antes de comenzar con la solución del ejercicio (quizás aquí esté la clave del mismo): La principal dificultad está en el hecho de que la función $|u(x,t)|$ no es necesariamente derivable. Ahora bien, Si a y b son números reales dados, la desigualdad $|a| \leq b$ es equivalente a la desigualdad $-b \leq a \leq b$ que a su vez es equivalente a dos desigualdades, $-b \leq a,\ a \leq b$.

En conclusión, la hipótesis $|u(x,t)| \leq v(x,t)$, para cada (x,t) perteneciente a la frontera parabólica de Ω es equivalente a que $-v(x,t) \leq u(x,t)$, para cada (x,t) perteneciente a la frontera parabólica de Ω y que $u(x,t) \leq v(x,t)$, para cada (x,t) perteneciente a la frontera parabólica de Ω.

Solución de PMM6:

La desigualdad $|u(x,t)| \leq v(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$ es equivalente a $-v(x,t) \leq u(x,t) \leq v(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$.

Probemos los apartados (a) y (b) que se proponen a continuación:

(a) $u(x,t) \leq v(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. Para probar esto, observemos que la función $u - v$ verifica la ecuación del calor y que, por hipótesis $u - v$ es menor o igual que cero en la frontera parabólica de Ω. Por el principio del máximo, tendríamos $u(x,t) \leq v(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$.

(b) $-v(x,t) \leq u(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. Para probar esto, observemos que si $h \equiv 0$, la función $u + v$ verifica la ecuación del calor y que, por hipótesis $u + v$ es mayor o igual que cero en la frontera parabólica de Ω. Por el principio del mínimo, tendríamos $u(x,t) + v(x,t) \geq 0,\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. O lo que es lo mismo, $-v(x,t) \leq u(x,t),\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$.

Obviamente, (a) y (b) es lo que queríamos probar. Nótese que para el apartado (a) no es necesario que h sea idénticamente cero.

La bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo es la siguiente:

1. **Página web de la asignatura, capítulo III: la ecuación del calor. https://www.ugr.es/ acanada/docencia/fisica/2calorfisica0910.pdf**
2. **A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.Capítulo 3.**
3. **F. John. Partial Differential Equations. Springer, 3rd edition, 1978. Chapter 7.**