ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 13/04/2018.

1. (a) **(1 punto)** Dedúzcase, razonadamente, la fórmula que proporciona todas las soluciones de la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0\ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2,\ u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}) \tag{1}$$

(b) **(4 puntos)** Si $f \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\, dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t)\ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2, \tag{2}$$

calculando para ello las derivadas de segundo orden que aparecen en (2)
(Sugerencia: recuérdese que $\dfrac{\partial \left(\int_0^t H(x,t,s)\, ds\right)}{\partial t} = H(x,t,t) + \int_0^t \dfrac{\partial H(x,t,s)}{\partial t}\, ds$*).*

(c) **(1 punto)** Teniendo en cuenta los dos apartados previos, propóngase una fórmula que proporcione todas las soluciones de (2).

(d) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + b\, u_y(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{3}$$

$u_{xy} + a u_x + b u_y + ab u = 0 \,/\, u(x,y) = v(x,y)\, e^{-ay-bx}$

$v_{xy} = 0$

donde b es una constante real.

i. **(1 punto)** Sin resolver la ecuación (3), demuéstrese que el conjunto de soluciones ($u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$) de (3) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

ii. **(3 puntos)** Encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (3).
Sugerencia: Si $h \in C(\mathrm{R}, \mathrm{R})$, *todas las soluciones de la e.d.o. de primer orden*

$$v'(x) + bv(x) = h(x),\ x \in \mathrm{R},$$

son de la forma

$$v(x) = e^{-bx}\left[c + \int e^{bx} h(x)\, dx\right],\ c \in \mathrm{R}.$$

Realizando el c.v. $\begin{cases} \xi = x+t \\ \mu = x-t \end{cases}$ (1) se transforma en

$$u_{\xi\mu} = 0 \quad (2)$$

Las sol. de (2) son $\{ F(\xi) + G(\mu),\ F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \}$. Así que las sol. de (1) son $\{ F(x+t) + G(x-t),\ F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \}$

1. b) $H(x,t,s) \equiv \displaystyle\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy$

J. Cia 13/Abril/2018

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t H(x,t,s)\,ds$$

$$V_x = \frac{1}{2}\int_0^t H_x(x,t,s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t (f(x+t-s,s) - f(x-t+s,s))\,ds$$

$$\rightarrow V_{xx} = \frac{1}{2}\int_0^t [f_x(x+t-s,s) - f_x(x-t+s,s)]\,ds$$

$$V_t = \frac{1}{2}\cancel{H(x,t,t)} + \frac{1}{2}\int_0^t H_t(x,t,s)\,ds = \frac{1}{2}\int_0^t f(x+t-s,s) + f(x-t+s,s)\,ds$$

$$\rightarrow V_{tt} = \frac{1}{2}\left\{ f(x,t) + f(x,t) + \int_0^t [f_x(x+t-s,s) - f_x(x-t+s,s)]\,ds \right\}$$

Trivialmente $-V_{xx} + V_{tt} = f(x,t)$

1. c) Las soluciones de (2) son de la forma

$$w(x,t) = F(x+t) + G(x-t) + v(x,t),\quad F,G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$

v es la obtenida en el apartado 1(b).

---

d) i) $\{ \operatorname{sen}(nx),\ x\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{N} \}$ es un conjunto de sol. de (3) l.i.

d) ii) Fijamos $y \in \mathbb{R}$ y definimos $r(x) \equiv u_y(x,y)$, $x \in \mathbb{R}$. Entonces (3) es $\quad r'(x) + b\,r(x) = 0 \Rightarrow r(x) = c\,e^{-bx} \Rightarrow$

$u_y(x,y) = c\,e^{-bx}$, $c = c(y)$. Además,

$$u(x,y) = \int c(y)\,e^{-bx}\,dy + H(x) = e^{-bx}D(y) + H(x),\quad D, H \in C^?(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$u(x,y) = e^{-bx} D(y) + H(x)$$

$$u_y = e^{-bx} D'(y) \qquad b\,u_y = b\,e^{-bx} D'(y)$$

$$u_{xy} = (-b) e^{-bx} D'(y) = -b\,e^{-bx} D'(y)$$

Otra forma

$$u_{xy} + b\,u_y = (u_x + b u)_y = 0 \Rightarrow u_x(x,y) + b\,u(x,y) = H(x)$$

Fijamos $y = y_0$. Definimos $w(x) \equiv u(x, y_0)$, $x \in \mathbb{R}$.

Entonces $w'(x) + b\,w(x) = H(x) \Rightarrow$

$$w(x) = e^{-bx}\left[c + \int e^{bx} H(x)\,dx\right], \quad C = c(y_0) = C(y)$$

Entonces

$$u(x,y) = e^{-bx}\Big[C(y) + \underbrace{\int e^{bx} H(x)\,dx}_{D(x)}\Big]$$

$$= e^{-bx}\left[C(y) + D(x)\right], \quad C, D \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

$$\equiv e^{-bx} C(y) + M(x), \quad C, M \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

13/Abril/2018