# LA ECUACIÓN DEL CALOR. PRINCIPIO DEL MÁXIMO-MÍNIMO [1]

En la página web

https://www.ugr.es/ acanada/docencia/docencia.htm

encontrarás información adicional sobre el contenido de este archivo y la ecuación del calor

## CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $C^1[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$. Si $x_0 = b$, entonces $f'(x_0^-) \geq 0$. Si $x_0 = b$, muestra dos ejemplos donde se cumpla que $f'(x_0^-) = 0$ y $f'(x_0^-) > 0$ son posibles.

   EjercicioPMM1: pruébese la afirmación anterior

2. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es $C^2[a, b]$ y alcanza el máximo en un punto $x_0 \in (a, b)$, entonces $f'(x_0) = 0$ y $f''(x_0) \leq 0$.

   Ejercicio PMM2: pruébese la afirmación anterior

La ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (C)$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

El principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor se enuncia a continuación. *Se ruega encarecidamente al alumno que previamente se familiarice con el concepto de frontera parabólica, examinando detalladamente el archivo que se adjunta sobre ello.*

[1] A. Cañada, Abril 2020

**Teorema** 1.. *Sea $\omega$ un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifica*

$$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

*se tiene que*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial_1\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial_1\Omega} u, \tag{2}$$

*donde $\partial_1\Omega$ es la denominada frontera parabólica de $\Omega$ que se define como*

$$\partial_1(\Omega) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \le t \le T\}\ \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

**NOTAS.** La notación $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ significa que la función $u$ es continua en $\overline{\Omega}$, y que fijado $t,\ 0 < t < T$, la función $u(x,t)$, como función de $x \in \omega$ es $C^2$ y que, fijado $x,\ x \in \omega$, la función $u(x,t)$, como función de $t \in (0,T)$ es $C^1$. Por otra parte, $\Delta_x u(x,t)$ denota el laplaciano de la función $u(x,t)$, respecto de $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \omega$.

**Demostración.** Demostremos, por ejemplo, el principio del máximo (el principio del mínimo se probaría usando el principio del máximo para la función $-u$ en lugar de $u$).

Se recomienda otra vez al alumno que, previamente, se familiarice con las situaciones:

1. $n = 1,\ \omega = (a,b)$,
2. $n = 2$, $\omega$ un círculo arbitrario.

con el objeto de familiarizarse con la noción de frontera parabólica. Véase para ello el archivo adjunto.

**La demostración consta de varias etapas**:

1. Primero se considera la situación donde la variable $t$ se restringe a un subintervalo de $(0,T)$, concretamente $(0, T-\varepsilon)$, y se tiene una desigualdad estricta negativa en (1). Entonces las hipótesis son: el dominio

   $$\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \le T - \varepsilon\}.$$

   y la desigualdad estricta

   $$u_t(x,t) - \Delta_x u(x,t) < 0,\ \forall\ (x,t) \in \Omega_\varepsilon$$

En este caso, sea $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} u$.

Ejercicio PMM3: pruébese la existencia de $(x_0, t_0)$ verificando la propiedad anterior

Entonces necesariamente $(x_0, t_0) \in \partial_1 \Omega_\varepsilon$. En efecto, si no fuese así, caben dos posibilidades

*a)* $(x_0, t_0) \in \Omega_\varepsilon$. Entonces se tiene (por favor, úsense los conocimientos previos necesarios proporcionados al principio de este archivo)

$$u_t(x_0, t_0) = 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \ \forall \ i, \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto,

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (1).

*b)* $(x_0, t_0)$ es tal que $x_0 \in \omega$ y $t_0 = T - \varepsilon$. Entonces se tiene (por favor, úsense de nuevo los conocimientos previos necesarios proporcionados al principio de este archivo)

$$u_t(x_0, t_0) \geq 0, \quad u_{x_i x_i}(x_0, t_0) \leq 0, \ \forall \ i \ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, de nuevo tenemos

$$u_t(x_0, t_0) - \Delta_x u(x_0, t_0) \geq 0$$

lo que contradice que tengamos una desigualdad estricta negativa en (1).

En resumen, en esta primera etapa hemos probado que si tenemos una desigualdad estricta negativa en (1) y el dominio $\Omega$ se cambia por $\Omega_\varepsilon$, entonces

$$\max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} u = \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} u.$$

2. En una segunda etapa, hacemos tender $\varepsilon$ a cero por la derecha, obteniendo que, si tenemos una desigualdad estricta negativa en (1), entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\overline{\Omega_\varepsilon}} u = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \max_{\partial_1 \Omega_\varepsilon} u = \max_{\partial_1 \Omega} u$$

3. Para el caso en el que en (1) se tiene una igualdad, se considera la función auxiliar $v^k(x,t) = u(x,t) - kt$, con $k$ positivo. Entonces

$$v_t^k - \Delta_x v^k = u_t - \Delta_x u - k = -k < 0.$$

Por lo anterior, tendremos que

$$\max_{\overline{\Omega}} \ v^k = \max_{\partial_1 \Omega} \ v^k.$$

Si ahora se hace tender $k$ a cero por la derecha, tendremos (2).

El principio del máximo-mínimo se puede usar para probar que el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \qquad (C1)$$

tiene solución única.

El interés por este problema proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: Tenemos una varilla delgada de longitud $\pi$, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada (por eso la ecuación del calor que aparece es homogénea). Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa $x$ y en el tiempo $t$.

Si designamos por $\Omega$ al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$$

y que satisface (C1) puntualmente.

Ejercicio PMM4: Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor pruébese que (C1) tiene, a lo sumo, una solución.

Finalmente, dos ejercicios que no son tan triviales.

Ejercicio PMM5 : Sean las funciones $u$ y $v$, respectivamente, soluciones de

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} + h(x,t), & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) = a(t), & & u(\pi,t) = b(t), & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (C_u)$$

y

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} + h(x,t), & 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) = c(t), & & v(\pi,t) = d(t), & 0 \le t \le T, \\ v(x,0) & = & g(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array} \qquad (C_v)$$

con $a(t) \le c(t),\ 0 \le t \le T$, $b(t) \le d(t),\ 0 \le t \le T$, $f(x) \le g(x),\ 0 \le x \le \pi$.

Pruébese que $u(x,t) \le v(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 \le t \le T$.

Ejercicio PMM6 Sean $u$ y $v$ dos soluciones de la ecuación del calor no homogénea

$$\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial w(x,t)}{\partial t} + h(x,t), 0 < x < \pi,\ 0 < t < T$$

tales que $|u(x,t)| \le v(x,t)$, para cada $(x,t)$ perteneciente a la frontera parabólica de $\Omega = (0,\pi) \times (0,T)$.

Demuéstrese que $|u(x,t)| \le v(x,t)$, para cada $(x,t) \in \overline{\Omega}$.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. Página web de la asignatura, capítulo III: la ecuación del calor.
   https://www.ugr.es/ acanada/docencia/fisica/2calorfisica0910.pdf
2. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.Capítulo 3.
3. F. John. Partial Differential Equations. Springer, 3rd edition, 1978. Chapter 7.