CAPÍTULO II[1]: PROBLEMAS DE TIPO MIXTO (métodos de Fourier)

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Integración de Lebesgue en $\mathbb{R}$.
   a) Conjuntos medibles y funciones integrables.
   b) Teorema de la convergencia monótona.
   c) Teorema de la convergencia dominada.
   d) Funciones absolutamente continuas y fórmula de integración por partes.
2. Nociones básicas de espacios normados y espacios de Hilbert.
3. Convergencia uniforme de series de funciones.
4. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes.
5. Teorema de derivación de integrales paramétricas.

Se pueden consultar las referencias:

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.
2. H. Brezis. Análisis Funcional. Madrid, Alianza Universidad, 1984.
3. E. A. Coddington y N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. Malabar, Robert E. Krieger Publishing Company, 1984.
4. K. R. Stromberg. An introduction to classical real analysis. Belmot, Wadsworth, 1981.
5. H. Weinberger. Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Barcelona, Reverté, 1970.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

Este capítulo comienza repasando las principales propiedades de $L^2(a,b)$, el conjunto de funciones medibles $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, de cuadrado integrable en el

[1]A. Cañada, Febrero 2007, EDPMAT

sentido de Lebesgue. Sabemos que dos funciones se consideran iguales si lo son casi por doquier en $[a,b]$ (c.p.d. en $[a,b]$). Usaremos la notación

$$L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f\text{medible},\ \int_a^b f^2(x)\ dx\ < +\infty\}$$

Además, si

$$f, g \in L^2(a,b),\ \ f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ c.p.d. en } [a,b].$$

$L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real con la suma usual de funciones y el producto usual de un número real por una función. También, en $L^2(a,b)$ se puede definir el producto escalar

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\ dx,\ \forall f, g \in L^2(a,b)$$

Con este producto escalar, $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

El conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}},\ p_n,\ \ q_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \cos\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$
$$q_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \operatorname{sen}\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a}\right)$$

es una base de $L^2(a,b)$ (Lebesgue, 1902). Esto significa que, para cualquier función $f \in L^2(a,b)$, se tiene

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{b-a}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n p_n + b_n q_n) \tag{1}$$

donde

$$a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{b-a}} >,\ \ a_n =< f, p_n >,\ \ b_n =< f, q_n > \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

son los llamados coeficientes de Fourier de f respecto de la base anterior.
La convergencia de la serie (1), llamada serie de Fourier de f respecto de la base dada, se entiende con la norma usual de $L^2(a,b)$).
Se cumple además la igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 \, dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) \ , \ \forall f \in L^2(a,b).$$

(En este punto, sería interesante que el alumno reflexionara seriamente sobre las similitudes y diferencias básicas entre el espacio de Hilbert separable de dimensión infinita $L^2(a,b)$ y el espacio de Hilbert $n-$ dimensional $\mathbb{R}^n$).

En particular, en el intervalo $[-\pi,\pi]$, se tiene que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)), \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \ \text{sen}(n(\cdot)), \ n \in \mathrm{N} \right\}$$

es una base de $L^2(-\pi,\pi)$.

Esto significa que

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n \cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n \ \text{sen}(n(\cdot))) \ , \ \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx) \ dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \ \text{sen}(nx) \ dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Insistimos en que la convergencia de la serie de Fourier de f, se entiende en $L^2(-\pi,\pi)$. De manera más precisa, si

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{A}_k \cos(kx) + \mathrm{B}_k \ \text{sen}(kx)) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [-\pi,\pi],$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{S}_n(x)|^2 \ dx = 0.$$

La igualdad de Parseval en $[-\pi,\pi]$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \ dx = \pi\left(\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)\right), \ \forall f \in L^2(-\pi,\pi).$$

Debe observarse que los coeficientes de Fourier de una función f pueden definirse si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, aunque en este caso no son necesariamente ciertos los resultados mencionados con anterioridad sobre convergencia, igualdad de Parseval, etc.

La convergencia en el espacio $L^2(a,b)$ no es muy satisfactoria desde el punto de vista de las aplicaciones *(¿podría el alumno dar una justificación de esta afirmación?)*. Es más interesante conocer en qué situaciones puede afirmarse que se tiene convergencia puntual de la serie de Fourier de una función dada a dicha función. Ahora bien, este es un tema peliagudo. De hecho, la convergencia puntual de Series de Fourier sigue siendo una cuestión que genera parte de la investigación que se realiza en la Matemática actual. Restringiéndonos al subconjunto C, de $L^2(-\pi,\pi)$, formado por las funciones continuas en $[-\pi,\pi]$ y 2π -periódicas ($f(-\pi) = f(\pi)$), diremos que fué Du Bois-Reymond, en 1873, el primero que encontró una función $f \in C$ cuya serie de Fourier diverge en algún punto de $[-\pi,\pi]$. Posteriormente se dieron ejemplos más simples como el de Fejér, en 1911. En 1966, L. Carleson ("On the convergence and growth of partial sums of Fourier series", Acta Math. 116, 135-157, 1966) probó que si $f \in C$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d. en $[-\pi,\pi]$ a f (este resultado es también cierto para funciones de $L^2(-\pi,\pi)$). El mismo año, Kahane y Katznelson probaron que si $\mathrm{E} \subset [-\pi,\pi]$ es un subconjunto de medida cero, entonces existe una función $f \in C$ tal que su serie de Fourier no converge en E. Desde luego, estos dos últimos resultados que hemos mencionado (que no son en absoluto triviales de probar y cuyo nivel rebasa el de este curso), dejan zanjada desde el punto de vista teórico la cuestión de la convergencia puntual de las Series de Fourier en el conjunto C.
Por otra parte, hay que ser muy cuidadosos si tratamos con funciones que no pertenezcan a $L^2(-\pi,\pi)$. En este caso, el comportamiento (referente a la convergencia puntual) que ofrecen las Series de Fourier es a veces "tremendamente patológico". Por ejemplo, en 1926, *Kolmogorov ("Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout". C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 183, 1327-1328 (1926))* dió un ejemplo de una función $f \in L^1(-\pi,\pi)$ y 2π-periódica tal que su serie de Fourier no converge en ningún punto.

A nivel de este curso, como criterio de convergencia puntual de las Series de Fourier, tendremos suficiente con el criterio de Dini:

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$ y si $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función $\tau \to \dfrac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta,\delta)$ para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, entonces $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, localmente integrable y $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función f tiene derivadas laterales en x, entonces $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$.

Sobre la relación entre las series de Fourier de una función f y su derivada f', tenemos el resultado siguiente:
Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathrm{R}$ es absolutamente continua y 2π-periódica, entonces la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n \cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n \operatorname{sen}(n(\cdot)))$$

(la serie de Fourier de f' se obtiene derivando, término a término, la serie de Fourier de f).

Un hecho que llama la atención es que si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ y a es un punto dado de $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\int_a^x f(t)\,dt = \frac{\mathrm{A}_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n \int_a^x \cos(nt)\,dt + \mathrm{B}_n \int_a^x \operatorname{sen}(nt)\,dt \right)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (la integración término a término de la serie de Fourier de una función dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$ converge uniformemente a la integral de f, sin necesidad de condiciones adicionales sobre f).

Una condición suficiente que permite garantizar que $\mathrm{S}_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$ es:

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, 2π-periódica y $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

Un tema muy interesante es la relación existente entre la regularidad de la función f y la convergencia uniforme de $\mathrm{S}_n(x),\ \mathrm{S}'_n(x), \cdots$, a $f,\ f', \cdots$ respectivamente. Este hecho será de gran utilidad al aplicar la teoría de Series de Fourier al estudio de las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática. Concretamente se tiene el resultado siguiente:
Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k con $f^{k)}$ absolutamente continua y tal que $f^{k+1)} \in L^2(-\pi, \pi)$. Si además se cumple que

$$f^{i)}(-\pi+) = f^{i)}(\pi-),\ 0 \le i \le k,$$

entonces

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \mathrm{S}_n(x)$$

(2)
$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}'_n(x)$$

$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$

$$f^{k)}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}^{k)}_n(x)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, donde $\{\mathrm{S}_n, \; n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} y 2π-periódica, se cumple (2).

Como veremos en el capítulo, cuando tratemos con problemas de tipo mixto para la ecuación del calor o la ecuación de ondas, es necesario manejar adecuadamente otras bases del espacio $L^2(a, b)$. Esto depende básicamente de las condiciones de contorno que estemos considerando. En este sentido, puede probarse que los conjuntos

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \, \mathrm{sen}(n(\cdot)) \; , \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n(\cdot)) \; , \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

son bases de $L^2(0, \pi)$. Es muy conveniente familiarizarse con las correspondientes igualdades de Parseval y las condiciones suficientes que garantizan la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f a f, para cada una de las bases citadas (véase la bibliografía recomendada).

El capítulo continua con la aplicación de estos conocimientos al estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi, \; 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{C1}$$

y

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi. \end{aligned} \tag{C2}$$

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.
Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, pero donde además de la superficie lateral, los extremos de la varilla también se mantienen aislados (en lugar de suponer que se encuentran a cero grados).

La ecuación en derivadas parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{C}$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto lo probamos con detalle en este capítulo. No obstante, también se puede intuir desde el principio alguna diferencia cualitativa importante en lo que se refiere al comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a $+\infty$) de las soluciones de ambos problemas: mientras que para (C1) se tendrá $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, para (C2) se cumple $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = b$, constante que, en general, no es cero. Esto tendremos oportunidad de visualizarlo en las correspondientes prácticas de ordenador con el programa Mathematica.

Entrando en detalle, si Ω es el conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T\}$$

una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega)$ y que satisface (C1) puntualmente. Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (C1) tiene, a lo sumo, una solución. Una versión de este principio para la ecuación del calor $n-$ dimensional es la siguiente:

Teorema 1.. *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Gamma = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C^2_x(\Gamma) \cap C^1_t(\Gamma) \cap C(\overline{\Gamma})$ verifica*

$$u_t - \Delta_x u \leq 0, \text{ en } \Gamma, \tag{3}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Gamma}} u = \max_{\partial_1 \Gamma} u, \tag{4}$$

donde $\partial_1 \Gamma$ es la denominada frontera parabólica de Γ que se define como

$$\partial_1(\Gamma) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

La demostración consta de los pasos siguientes:

1. Primero se considera el caso en que se tiene una desigualdad estricta en (3) y el dominio es $\Gamma_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}$. Entonces, si $(x_0, t_0) \in \overline{\Gamma_\varepsilon}$ es tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Gamma_\varepsilon}} u$, un razonamiento elemental sobre el signo de la derivada primera de u en (x_0,t_0), respecto de t y de las derivadas segundas de u en (x_0,t_0), respecto de x_i dos veces, prueba que el punto (x_0,t_0) debe pertenecer a la frontera parabólica de Γ_ε.
2. Se hace tender ε a cero, por la derecha.
3. Para el caso en que en (3) se tiene una desigualdad no estricta, se considera la función auxiliar $v(x,t) = u(x,t) + kt$, con $k < 0$. Después se hace tender k a cero por la izquierda.

De manera análoga puede probarse un principio de mínimo. Para soluciones de la ecuación del calor tendremos un principio de máximo-mínimo.

Pasemos a continuación a comentar el tema de la existencia de soluciones de (C1). En una primera etapa, usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de (C1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Así obtenemos el problema de valores propios

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi],\ X(0) = X(\pi) = 0, \tag{$PVP1$}$$

y la familia uniparamétrica de e.d.o.

$$T'(t) - \mu T(t) = 0,\ t \in (0,T].$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) tiene solución no trivial. Así, diremos que μ es valor propio de (PVP1) si (PVP1) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes. Para ello, recordemos que, fijado μ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0, \pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:
- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1,\ X^2(x) = x,\ \forall\ x \in [0, \pi]$.
- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x),\ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.
- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = cos(\sqrt{-\mu}x),\ X^2(x) = sen(\sqrt{-\mu}x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

Cualquier solución de (PVP1) es de la forma $X(x) = c_1X^1(x) + c_2X^2(x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:
- Si $\mu = 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\pi = 0, \end{gathered}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).
- Si $\mu > 0$,

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).
- Si $\mu < 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2 sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto $\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

El método de separación de variables permite calcular la única solución de (C1) en casos sencillos que son aquellos en los que la función f de (C1) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, .., n_m$, números naturales distintos. En estos casos, la única solución de (C1) es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{sen}(n_i x) \exp(-n_i^2 t), \ \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

En una segunda etapa, usando los casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ \mathrm{sen}(n(\cdot)), \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

probamos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1) que tiene el enunciado siguiente:
Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{sen}(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } \ t > 0, \\ f(x), & \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \mathrm{sen}(nx) \ dx, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Usando a continuación una función de Green apropiada, se consigue un teorema más general:
Si $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es continua y satisface $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces (C1) tiene una única solución dada por la fórmula anterior.

A continuación mostramos algunas propiedades referentes al comportamiento cualitativo de la solución de (C1): dependencia continua respecto de la temperatura inicial f, regularidad C^∞ para cualquier tiempo positivo y el hecho de que, sea cual sea la temperatura inicial, la única solución de (C1) tiende a cero cuando el tiempo diverge a $+\infty$.

En lo que respecta al problema (C2), una solución es cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (C2) puntualmente. Respecto de la unicidad de soluciones, el principio del máximo-mínimo no parece ahora directamente aplicable, puesto que las condiciones de contorno, para $x = 0$ y $x = \pi$, son distintas de las consideradas en (C1). La idea básica para demostrar la unicidad de soluciones de (C2) es considerar una cierta integral de energía, definida por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x} \right)^2\ dx \right]\ ds$$

Puede demostrarse que si u es cualquier solución de (C2), entonces $E(t)$ es constante. Como consecuencia se obtiene trivialmente que (C2) puede tener, a lo más, una solución.
En lo concerniente a la existencia de soluciones, nuevamente aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos, y usando éstos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2):
Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } \ t > 0, \\ f(x), & \text{si } \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probamos, además, algunas propiedades sobre la dependencia continua de la única solución de (C2), respecto de la temperatura inicial f. Asimismo, se cumple en este caso la propiedad de regularidad C^∞ de las soluciones, para cualquier tiempo positivo. En cambio, el comportamiento asintótico de las mismas es ahora distinto del mostrado para el problema (C1). Para (C2) demostramos que, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, las soluciones convergen a una constante, en general no nula. Esto se corresponde con el hecho de que, al estar en (C2) los extremos y la superficie lateral de la varilla aislada, entonces no puede entrar ni salir calor de la misma, con lo que éste no se pierde; lo que sí tiende es a difundirse el calor de manera homogénea por la varilla.

El capítulo sigue con el estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación de ondas (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

El primero de ellos responde a la formulación

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), \quad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{$O1$}$$

y modela las vibraciones pequeñas de una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$, cuando la posición inicial de la misma está dada por la función f y la velocidad inicial por g.
Si $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$, una solución de (O1) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (O1) puntualmente.

Demostramos en primer lugar que (O1) puede tener, a lo sumo, una solución, usando para ello la función energía

$$I(t) = \int_0^\pi \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2 \right) \, dx$$

A continuación, mediante la técnica de separación de variables probamos que si f y g son adecuadas, entonces (O1) tiene efectivamente una solución. El resultado, concretamente, es el siguiente:

Si f y g satisfacen las condiciones

$$f \in C^3[0,\pi], \; f(0) = f(\pi) = 0, \; f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$
$$g \in C^2[0,\pi], \; g(0) = g(\pi) = 0,$$

entonces (O1) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(nt) + B_n \; sen(nt)) \; sen(nx),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \; B_n = \frac{2}{n\pi} \int_0^\pi g(x) \operatorname{sen}(nx) \, dx, \; \forall \, n \in \mathbb{N}.$$

Seguidamente, expresamos esta solución de una manera más conveniente, motivando el método de propagación de las ondas. Usando este hecho probamos a continuación que se pueden rebajar las condiciones de regularidad sobre f y g. Más concretamente, *si f y g satisfacen las condiciones*

$$f \in C^2[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0,$$
$$g \in C^1[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0,$$

mostramos que la única solución u de (O1) está dada por la fórmula (llamada fórmula de D'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G_1(z)\ dz,$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y $2\pi-$periódicas de f y g, a $\mathbb{R}$.

Después de interpretar de manera física la anterior expresión, dedicamos nuestra atención al estudio de algunas propiedades cualitativas de las soluciones de (O1), tales como el principio de invariabilidad de la energía, dependencia continua respecto de los datos iniciales, mantenimiento de la regularidad de las condiciones iniciales para tiempos positivos, etc.

Un objetivo básico del anterior estudio es poner de manifiesto las posibles similitudes y diferencias con la ecuación del calor, estudiada con anterioridad.

El otro problema que estudiamos responde a la formulación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \ge 0,
\end{aligned} \qquad (O2)$$

que se corresponde con el caso en que los extremos de la cuerda están libres. Estudiamos la existencia (método de separación de variables) y unicidad (método de la energía) de las soluciones de (O2). Mencionamos también algunas diferencias cualitativas respecto de (O1), como, por ejemplo, el hecho de que las soluciones pueden dejar de ser acotadas.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente, donde se indica con una (b) si es básica y con una (c) si es complementaria:

1. (b) A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.
2. (c) E.A. González-Velasco. Fourier Analysis and Boundary Value Problems. San Diego, Academic Press, 1995.
3. (c) T.W. Körner. Fourier Analysis. Cambridge, Cambridge University Press, 1988.
4. (b) A.N. Tijonov y A.A. Samarki. Ecuaciones de la Física Matemática. Perú, Mir, 1980.
5. (c) H. Weinberger. Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Barcelona, Reverté, 1970.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. A veces, a partir de la serie de Fourier de una función dada f, puede formarse otra serie que es más adecuada desde el punto de vista de la convergencia puntual a f. Este es el caso por ejemplo, de la sumabilidad Cesáreo de las Series de Fourier, donde la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, $\{S_n, \ n \in \mathbb{N}\}$ se sustituye por la sucesión formada por sus medias aritméticas. Se pueden consultar los libros de Apostol y Stromberg indicados al comienzo del capítulo.
2. Siempre es bonito un recorrido por los principales hechos históricos de la teoría de Series de Fourier. Pueden ser útiles las referencias de A. Cañada, E. A. González-Velasco y T.W. Körner. Además, si se trata de consultas históricas es muy útil el libro de M. Kline: Mathematical thought from ancient to modern times. Nueva York, Oxford University Press, 1972 (versión española en Alianza Editorial, Madrid, 1992). Asimismo, se puede encontrar información muy amplia en la dirección de internet
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html
3. Es muy recomendable que el alumno consulte la bibliografía recomendada anteriormente (especialmente T.W. Körner y H. Weinberger) para estudiar los principales hechos de las series de Fourier en varias variables (especialmente en dos y tres variables), así como sus aplicaciones al estudio de problemas de tipo mixto para las ecuaciones del calor y ondas en dimensiones superiores a uno. Hay nociones que son similares (por ejemplo la noción de base del espacio de Hilbert $L^2(\Omega)$, donde Ω

es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$). Otras en cambio, se van complicando a medida que la dimensión aumenta, como por ejemplo los criterios de convergencia puntual de la serie de Fourier.

En general, al aplicar el **método de separación de variables** a estos problemas se llegaría a problema de valores propios del tipo

$$\begin{aligned} \Delta X(x) \ + \ \lambda X(x) = 0,\ x \in \Omega, \\ X(x) = 0,\ x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$.

4. En este capítulo se han estudiado dos problemas de tipo mixto para la ecuación del calor. En ambos se daba como dato inicial una determinada temperatura f. Además, en el primero de ellos se suponía conocida la temperatura en los extremos de $[0,\pi]$, mientras que en el segundo se daba como dato el flujo de calor a través de tales extremos. La clave para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se ha encontrado en el hecho de que, en ambos casos, la temperatura inicial admitía un desarrollo en serie, usando precisamente como sumandos de tal desarrollo las funciones propias de los problemas de valores propios correspondientes.

   Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, en un extremo de la varilla puede darse como dato la temperatura en cualquier tiempo, y en el otro, el flujo de calor, o incluso una combinación de ambos. Además, se puede suponer que la superficie lateral de la varilla no está aislada, de tal forma que puede entrar o salir calor. La intuición física sugiere que tales problemas han de tener solución única. Otra cosa es demostrarlo rigurosamente.

   Desde el punto de vista matemático, los problemas citados se pueden plantear de la forma

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ &\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = a(t),\ 0 < t \le T, \\ &\beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = b(t),\ 0 < t \le T, \\ &u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (sl1)$$

   donde f representa la temperatura inicial y la presencia de g significa que hay una fuente externa de calor, mientras que las otras dos condiciones en $(sl1)$ son condiciones de contorno que combinan la temperatura y el flujo de calor en los extremos de la varilla (u_x indica la función derivada parcial de u, respecto de la variable x).

Bajo ciertas restricciones de regularidad sobre las funciones f, g, a y b, y sobre el signo de los coeficientes $\alpha_i, \beta_i,\ 1 \leq i \leq 2$, puede demostrarse, bien usando el método de la energía, bien usando principios del máximo adecuados, que $(sl1)$ tiene, a lo más, una solución. Ya sabemos que a continuación viene la siguiente pregunta: ¿también a lo menos? Esto es harina de otro costal. No todos los problemas de la forma $(sl1)$ pueden resolverse por el método de separación de variables; pero combinando éste con otros métodos (como aquellos que buscan la solución como suma de dos más elementales, una de ellas estacionaria), puede resolverse un buen número de problemas similares a $(sl1)$. Se puede consultar para ello la bibliografía recomendada (especialmente L.C. Andrews y A.N. Tijonov-A.A. Samarsky).
En general, la aplicación del método de separación de variables a aquellos problemas como $(sl1)$ que sean adecuados conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h, definida en $[0, \pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno de la forma:

$$\begin{array}{c} Z''(x) - \lambda Z(x) = 0,\ x \in [0, \pi], \\ \gamma_1 Z(0) + \gamma_2 Z'(0) = 0, \\ \delta_1 Z(\pi) + \delta_2 Z'(\pi) = 0, \end{array} \qquad (sl2)$$

donde $\gamma_i, \delta_i,\ 1 \leq i \leq n$, son constantes dadas.
Los problemas de contorno como $(sl2)$, donde las condiciones de contorno aparecen por separado, en los dos puntos extremos de $[0, \pi]$, se llaman problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. Sorprendentemente, el conjunto de funciones propias de $(sl2)$, convenientemente ortonormalizado, forma siempre (con ciertas restricciones sobre los coeficientes $\gamma_i, \delta_i,\ 1 \leq i \leq n$) una base del espacio $L^2[0, \pi]$. La demostración más bonita que conozco de este resultado usa en primer lugar la noción de función de Green para transformar el problema diferencial en una ecuación integral equivalente. A continuación esta ecuación integral puede plantearse en términos de un problema de valores propios para operadores lineales autoadjuntos en espacios de Hilbert de dimensión infinita. Por último se puede usar la resolución espectral (o diagonalización) de este tipo de operadores para tener el resultado.
Comentarios análogos pueden realizarse para la ecuación de ondas. Por

ejemplo, pueden estudiarse problemas de la forma

$$\begin{gathered} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = h(x,t),\ t > 0,\ x \in (0,\pi), \\ u(x,0) = f(x),\ x \in [0,\pi], \\ u_t(x,0) = g(x),\ x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = m_1(t),\ t \geq 0, \\ u(\ell,t) = m_2(t),\ t \geq 0. \end{gathered}$$

En este caso puede ser muy útil la referencia de H. Weinberger.

EJERCICIOS

1. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{5}$$

si $f(x) = \cos(x) - 1 + \dfrac{2x}{\pi}$.

2. Calcúlese la única solución de (5) si

$$f(x) = \begin{cases} x,\ \text{si } 0 \leq x \leq a, \\ \dfrac{a}{a-\pi}\ (x-\pi),\ \text{si } a \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

donde a es una constante dada tal que $0 < a < \pi$.

3. (**Ejercicio propuesto en el examen del 18/06/04)** Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{C2}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(\pi)^{-1/2}, (2/\pi)^{1/2} \cos\ n(.),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

b) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

c) Pruébese que si $f \in C^1[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)\exp(-n^2 t), & \text{si} \quad t > 0, \\ f(x), & \text{si} \quad t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

4. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & & 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), & & 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{6}$$

si $f(x) = \operatorname{sen}(x)$.

5. Encuéntrese la única solución de (6) cuando $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [0,\pi]$, siendo a y b números reales dados.
6. Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & & 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), & & 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), & & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & & t \ge 0. \end{aligned} \tag{7}$$

cuando $f(x) = \operatorname{sen}^3(x)$, $g(x) = x(\pi - x)$, $\forall\ x \in [0,\pi]$.

7. Demuéstrese que el problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \operatorname{sen}(x), && 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= 2\operatorname{sen}(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0
\end{aligned}
$$

tiene una única solución u. Defínase la energía de la onda u, en el tiempo t. Demuéstrese que dicha energía no es constante.

8. Calcúlese la única solución de

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \ge 0,
\end{aligned}
$$

cuando tomamos las funciones $f(x) = \cos^2 x,\ g(x) = 2x - \operatorname{sen}(2x),\ \forall\, x \in [0,\pi]$.

9. (**Propuesto en Ingeniería de Caminos el 03/02/05**) Calcúlese la única solución de

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= \operatorname{sen} x, && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.
\end{aligned}
$$

10. (**Propuesto en el examen del 26/04/05**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (C2)$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

b) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

c) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

11. (**Propuesto en el examen del 25/04/06**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \qquad (ONH)$$

donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.

a) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$

es solución de (ONH).

b) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \text{sen}(3x), \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
u(x,0) = -\text{sen}x,\ u_t(x,0) &= 8\text{sen}(5x), \qquad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}$$

12. (**Propuesto en el examen del 25/04/06**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t \le T, \qquad\qquad (C2) \\
u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

a) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

b) Demuéstrese rigurosamente que las funciones propias de (C2) son las funciones $\cos(\frac{2n-1}{2}x),\ n \in \mathbb{N}$.

c) Usando el hecho de que las funciones $\{\cos(nx),\ n \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}\}$ constituyen una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$, demuéstrese que las funciones $\{\cos(\frac{2n-1}{2}x),\ n \in \mathbb{N}\}$ también forman una base ortogonal de $L^2(0,\pi)$.

d) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.

13. (**Propuesto en el examen del 20/09/06**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0,\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0,\ 0 \leq t, \\ &u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

a) Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.
b) Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución (sugerencia: método de la energía).
c) Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \cos(nx),$$

siendo $a_n,\ 0 \leq n \leq m,\ b_n,\ 0 \leq n \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?
d) Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

14. **(Propuesto en el examen del 20/09/06)**
a) Enunciado y demostración del principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.
b) Cálculese la única solución del problema

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T \\ &\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T \\ &u(x,0) = \mathrm{sen}^3(x); \quad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

(demuéstrese previamente que $\mathrm{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\mathrm{sen}(x) - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(3x)\ ,\forall x \in \mathbb{R}$).

15. (**Propuesto en el examen del 28/06/06**)
a) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

b) Considérese el problema de tipo mixto

$$(8)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned}$$

Si $f \equiv 0$, la única solución de (8) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, la única solución de (8) es $u(x,t) = \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}$.
Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x), \ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

1) ¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \ \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(2x)e^{-4t}, \ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

solución de (8)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (8) no se cumplen.

2) Calcúlese la única solución de (8).