LAS ECUACIONES DE LAPLACE Y POISSON [1]

En la página web

https://www.ugr.es/ acanada/docencia/docencia.htm

encontraréis información adicional sobre el contenido de este archivo y las ecuaciones de Laplace y Poisson.

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Extremos relativos para funciones de una y varias variables (signos de las derivadas o de las derivadas parciales).

2. E.D.O. lineales de primer y segundo orden.

En este archivo presentamos algunas de las propiedades básicas de la ecuación de Laplace:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0 \tag{1}$$

y de la ecuación de Poisson

$$\Delta u = g \tag{2}$$

Estas ecuaciones surgen cuando se estudian las soluciones de equilibrio (aquellas soluciones que no dependen del tiempo) de la ecuación de ondas y de la ecuación del calor. También aparece en otros tipos de problemas en Física, en relación con potenciales gravitacionales y eléctrostáticos, como se detalló en el capítulo de Introducción, explicado detalladamente en clase.

Las soluciones de la ecuación de Laplace (funciones de clase C^2 que satisfacen (1)) se denominan funciones armónicas.

El ejercicio siguiente nos puede recordar el comienzo de curso, allá por el 11 de Febrero (¡qué tiempos aquellos!)

Ejercicio LP1: Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Estúdiese rigurosamente la dimensión del espacio vectorial formado por todas las soluciones de la

[1] A. Cañada, Mayo 2020

ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega$ (se supone que $u \in C^2(\Omega)$). ¿Ocurre lo mismo cuando $n = 1$ y $\Omega = (a, b)$?

El primer resultado de interés es el siguiente principio.

Teorema 1. **Principio del máximo-mínimo para funciones armónicas** *Sea Ω un dominio (conjunto abierto y conexo) acotado de $\mathbb{R}^n$ y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que $\Delta u = 0$ en Ω. Entonces*

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u, \quad \min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u. \tag{3}$$

Además, si u no es contante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanzan en Ω.

Demostración de (3): Sea $\varepsilon > 0$ y consideremos la función

$$v_\varepsilon : \overline{\Omega} \to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \to u(x_1, x_2, \cdots, x_n) + \varepsilon(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) \tag{4}$$

Como v_ε es continua en $\overline{\Omega}$ y este conjunto es compacto, existe algún $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que

$$v_\varepsilon(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} v_\varepsilon$$

Recalquemos que $x_0 \in \overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Ahora bien, si $x_0 \in \Omega$, como Ω es abierto, se tiene que

$$\frac{\partial^2 v_\varepsilon(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0,\ 1 \leq i \leq n.$$

Por tanto, $\Delta v_\varepsilon(x_0) \leq 0$. Pero de (4) se tiene que $\Delta v_\varepsilon(x_0) = \Delta u(x_0) + 2n\varepsilon = 0 + 2n\varepsilon > 0$.

Conclusión: $x_0 \in \Omega$ no es posible, lo que implica $x_0 \in \partial\Omega$.

Por tanto

$$\max_{\overline{\Omega}} v_\varepsilon = \max_{\partial\Omega} v_\varepsilon$$

Si hacemos $\varepsilon \to 0^+$, tenemos (3), en lo que se refiere al máximo de u en $\overline{\Omega}$.

Un razonamiento análogo se puede hacer para el mínimo de u en $\overline{\Omega}$.

Notas y comentarios.

1. El principio anterior es para subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ y funciones u que cumplan las condiciones indicadas, pero hagamos hincapié en que n es arbitrario.

2. Como hemos visto en la demostración anterior, no es necesario exigir que Ω sea conexo para obtener la conclusión (3). Sí es necesario para obtener el hecho de que si u no es contante, ni el máximo ni el mínimo de u en $\overline{\Omega}$ se alcanzan en Ω. Esto no lo hemos demostrado y se puede consultar la bibliografía recomendada al final para ello, o la página web de la asignatura.

3. Comparemos el principio del máximo-mínimo anterior con el correspondiente principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor: en ambos casos se afirma que tanto el máximo como el mínimo se alcanzan en la frontera de Ω, pero para la ecuación del calor se especifica un subconjunto propio de la frontera de Ω donde se alcanza el máximo y el mínimo (en la llamada frontera parabólica de Ω.). Las soluciones de la ecuación de ondas no cumplen, en general esta clase de principios, como se puede ver (si se resuelve) en el ejercicio que sigue.

Ejercicio LP2: Encuéntrese alguna función $u(x,t)$ y algún subconjunto Ω de $\mathbb{R}^2$, abierto y acotado, tal que $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$,

$$u_{xx} - u_{tt} = 0 \text{ en } \Omega, \ \max_{\overline{\Omega}} u > \max_{\partial\Omega}$$

Como consecuencia de la desigualdad anterior, el máximo "de la onda u " en $\overline{\Omega}$, no se alcanza en $\partial\Omega$.

El ejercicio que sigue lo considero interesante para ver si se ha entendido bien el principio del máximo-mínimo anterior.

Ejercicio LP3: Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$, y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Si la función u satisface, además,

$$\Delta u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}(x) < 0, \ \forall \ x \in \Omega, \ b_i \in \mathbb{R}, \ 1 \le i \le n,$$

demuéstrese que $\min_{\overline{\Omega}} \ u = \min_{\partial\Omega} \ u$ y que $\min_{\overline{\Omega}} \ u$ no se alcanza en Ω.

El principio del máximo-mínimo motiva el estudio del problema de contorno (llamado problema de Dirichlet cuando $g \equiv 0$)

$$\begin{aligned} \Delta u(x) &= g(x), \ x \in \Omega, \\ u(x) &= f(x), \ x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5}$$

donde Ω es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, abierto, conexo y acotado, $g \in C(\Omega)$ y $f \in C(\partial\Omega)$. A la ecuación $\Delta u(x) = g(x)$ se le llama ecuación de Poisson.

Por el principio del máximo-mínimo, (5) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2(\Omega) \bigcap C(\overline{\Omega})$.

Nota importante Observemos que debido al principio del máximo-mínimo, los "problemas naturales" para las ecuaciones de Laplace y Poisson son los problemas de contorno, llamados también problemas de valores en la frontera. En cambio, para las ecuaciones de ondas y del calor, los "problemas naturales" eran los de tipo mixto, o también los llamados problemas de Cauchy o de valores iniciales (estudiados en clase para el caso de la ecuación de ondas).

El estudio general de (5) es difícil (esto se hace en cursos avanzados de EDP). En este archivo os mostraré el caso radial.

También habéis estudiado en la asignatura "variable compleja I" el caso en el que Ω es un círculo de $\mathbb{R}^2$ (véase la página web de nuestra asignatura, capítulo IV).

EL CASO RADIAL

Las soluciones radiales de las ecuaciones de Laplace y Poisson desempeñan un papel muy importante en el estudio de las mismas.

Recordemos (capítulo I, explicado en clase) que una función $z : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, se dice radial, si es de la forma $h(\|x\|)$ (radial respecto del origen) o, más generalmente, de la forma $h(\|x - \xi\|)$ (radial respecto de $\xi \in \mathbb{R}^n$, fijo). Es decir, si $x \in \Omega$, el valor de $z(x)$ depende sólo de la distancia de x a ξ y de la función h.

Recordemos más cosas explicadas en el capítulo I. El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$ por una masa m localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G\,\frac{m}{\|x - \xi\|}$$

donde G es la constante de gravitacional universal y $\| \cdot \|$ denota la norma euclídea.

El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$, de $\mathbb{R}^3$ se define de manera análoga como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, \cdots, \xi_n\}$$

Lo anterior se refiere a "distribuciones discretas finitas de masas". Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una "distribución continua de masa" que se encuentra en el espacio euclídeo. Aquí la suma finita se transforma en una "suma continua", dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$. **Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de $\mathbb{R}^3$ con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, el potencial gravitacional se define como**

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi \tag{6}$$

Observemos que, para ξ fijo, el integrando es una función radial. Curiosamente (¿Por qué uso la palabra curiosamente?), también demostramos en clase que si la función $\rho \in L^1(\Omega)$ y está acotada, entonces $V(x)$ está definido en todo $\mathbb{R}^3$.

Consideremos ahora la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{7}$$

Recordemos (insisto, hecho en clase en el capítulo I), que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (7) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$ y $r = \|x\|$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r} \, v'(r) = 0, \ \forall \ r \in (0, +\infty). \tag{8}$$

Recíprocamente, si v verifica (8) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (7) en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Véase, por ejemplo, el archivo sobre "soluciones radiales" de la página web de la asignatura, capítulo IV.

La ecuación (8) es una ecuación diferencial ordinaria, de segundo orden, lineal y homogénea. Por tanto el conjunto de sus soluciones es un espacio vectorial real de dimensión dos.

La base de dicho espacio vectorial es (también está hecho en clase, capítulo I)

$$\begin{aligned} &\{1, \ln r\},\ n = 2 \\ &\{1, r^{2-n}\},\ n > 2 \end{aligned} \tag{9}$$

A continuación os resuelvo de manera detallada dos ejemplos y os propondré algún otro.

Ejercicio resuelto 1 Calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x,y) = 0,\ 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(x,y) = 1,\ \text{si}\ \ x^2+y^2 = 1; \qquad u(x,y) = 3,\ \text{si}\ \ x^2+y^2 = 4$$

Solución: Por el principio del máximo-mínimo el problema tiene, a lo sumo, una solución. Si escribimos el problema de manera radial, tenemos (en este caso $n = 2, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}$).

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = 0,\ 1 < r < 2, \quad v(1) = 1,\ v(2) = 3$$

De (9) se deduce que $v(r) = a\ln r + b$. Imponiendo $v(1) = 1,\ v(2) = 3$, obtenemos

$$v(r) = \frac{2}{\ln 2}\ \ln r + 1$$

que en coordenadas euclídeas sería

$$u(x,y) = \frac{2}{\ln 2}\ \ln\sqrt{x^2+y^2} + 1$$

Ejercicio resuelto 2: Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{aligned} \Delta u(x,y,z) = 1,\ x^2+y^2+z^2 < 1, \\ u(x,y,z) = 0,\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{aligned} \tag{10}$$

Por el principio del máximo-mínimo el problema tiene, a lo sumo, una solución. Si escribimos el problema de manera radial, tenemos (en este caso $n = 3, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$).

$$v''(r) + \frac{2}{r}v'(r) = 1, \; 0 < r < 1, \quad v(1) = 0$$

La ecuación anterior es una e.d.o. lineal de segundo orden , **no homogénea** y por tanto no podemos usar directamente (9).

Para resolverla, hacemos el cambio de variable

$$v'(r) = z(r) \tag{11}$$

y tenemos

$$z'(r) + \frac{2}{r}z(r) = 1, \; 0 < r < 1$$

que es una e.d.o. lineal de primer orden, no homogénea, cuya solución es (¡a ver cómo están esos conocimientos de e.d.o !)

$$z(r) = e^{-\int \frac{2}{r}\, dr}\left[c + \int e^{\int \frac{2}{r}\, dr} 1 \; dr\right] = \frac{c}{r^2} + \frac{1}{3}r$$

Nota importante: Debemos tomar $c = 0$ puesto que la solución que buscamos tiene que ser $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ siendo

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$$

Esto no ocurría en el ejmplo anterior, donde $1 < r < 2$.

Seguimos. Como $z(r) = \frac{1}{3}r$, de (11) obtenemos $v(r) = \frac{1}{6}r^2 + b$. Como $v(1) = 0$, $b = -\frac{1}{6}$.

Conclusión: la única solución de (10) es $v(r) = \frac{1}{6}r^2 - \frac{1}{6}$, que en coordenadas euclídeas es

$$u(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{6} - \frac{1}{6}$$

Ejercicio LP4: Encuéntrese, razonadamente, la única solución del problema

$$\Delta u(x, y, z) = 0, \; 4 < x^2 + y^2 + z^2 < 9,$$

$$u(x, y, z) = 3, \text{ si } \; x^2 + y^2 + z^2 = 4; \qquad u(x, y, z) = 4, \text{ si } \; x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

BIBLIOGRAFÍA

- T.M. Apostol. Análisis Matemático, Barcelona, Reverté, 1960.

- I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.

- A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

- Página web de la asignatura https://www.ugr.es/ acanada/docencia/docencia.htm

- El vídeo https://www.youtube.com/watch?v=5YKr2NM51kY
para el caso en el que Ω es un rectángulo de $\mathbb{R}^2$.