A. Cañada, 8/5/2018

8/5/2018

$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_{|s|=1} \frac{1-|x|^2}{|s-x|^2} f(s)\,ds, & x \in \Omega = B_{\mathbb{R}^2}(0;1) \quad (*) \\ f(x), & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

(*) Es una integral de línea (con parámetro $x \in \Omega$) de un campo escalar.

[Recordemos (Análisis Vectorial):

$$\int_\gamma h(s)\,d\gamma \equiv \int_a^b h(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt \quad]$$

En nuestro caso, la línea (circunferencia) $|s| = 1$ se parametriza como $\begin{cases} s_1(\theta) = \cos\theta \\ s_2(\theta) = \operatorname{sen}\theta \end{cases} \equiv \gamma(\theta) \quad 0 \le \theta \le 2\pi$, $\|\gamma'(\theta)\| = 1$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-|x|^2}{\langle s-x, s-x\rangle} f(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

$s = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$

$x = (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)$, $\rho < 1$, $\varphi \in [0, 2\pi]$

$\langle s-x, s-x\rangle = \cancel{\langle \cos\theta - \rho\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta - \rho\operatorname{sen}\varphi \rangle =}$

$= \cancel{\cos\theta\operatorname{sen}\theta - \rho\cos\theta\operatorname{sen}\varphi - \rho\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + \rho^2\operatorname{sen}\varphi\cos\varphi}$

$= \langle (\cos\theta - \rho\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta - \rho\operatorname{sen}\varphi), (\cos\theta - \rho\cos\varphi, \operatorname{sen}\theta - \rho\operatorname{sen}\varphi) \rangle$

$= \cos^2\theta - \rho\cos\theta\cos\varphi - \rho\cos\theta\cos\varphi + \rho^2\cos^2\varphi + \operatorname{sen}^2\theta - \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi$

$- \rho\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + \rho^2\operatorname{sen}^2\varphi =$

$= \rho^2(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi) + 2\rho(-\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi) + (\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta)$

$= \rho^2 - 2\rho(\cos(\theta - \varphi)) + 1$

Así, (*) queda, cuando $x = (\rho\cos\varphi, \rho\operatorname{sen}\varphi)$, $\rho < 1$

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1-\rho^2}{\rho^2 - 2\rho\cos(\theta-\varphi) + 1} g(\varphi)\,d\varphi \qquad \text{c.q.d.}$$