ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS, 10/07/2019

1. Considérese el problema

$$\begin{array}{c} u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t) + h(x,t),\ 0 \leq x \leq \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x),\ 0 \leq x \leq \pi;\ u_t(x,0) = g(x),\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0, \end{array} \tag{1}$$

   (a) **(1 punto)** Si $h \equiv 0$, $f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i \mathrm{sen}(n_i x)$ y $g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j \mathrm{sen}(m_j x)$, donde a_i, b_j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, son números reales dados y n_i, m_j, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, son números naturales dados, escríbase la fórmula que proporciona la única solución de (1), comprobando que la fórmula propuesta es correcta.

   (b) **(2 puntos)** Calcúlese la única solución de (1) cuando

$$h(x,t) = -\mathrm{sen}(2x),\ f(x) = 3\ \mathrm{sen}(4x),\ g \equiv 0$$

   Sugerencia: búsquese la única solución de (1) de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$, con $s(x)$ conveniente para que $v(x,t)$ satisfaga un problema como el del apartado anterior.

2. Encuéntrese la única solución acotada de los problemas siguientes:

   (a) **(1 punto)** $u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ u(x,0) = \cos(3x) + \pi\mathrm{sen}(\sqrt{2}x)$,

   (b) **(1 punto)** $u_t(x_1,x_2,t) = \Delta_{(x_1,x_2)}(x_1,x_2,t),\ u(x_1,x_2,0) = \cos(x_1 + 2x_2)$,

   (c) **(1 punto)** $u_t(x_1,x_2,x_3,t) = \Delta_{(x_1,x_2,x_3)}(x_1,x_2,x_3,t),\ u(x_1,x_2,x_3,0) = \mathrm{sen}(x_1 + \sqrt{3}x_3)$

3. Sea Ω un abierto acotado de R^n, y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

   (a) **(2 puntos)** Si la función u satisface, además,

$$\Delta u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}(x) > 0,\ \forall\ x \in \Omega,\ b_i \in \mathrm{R},\ 1 \leq i \leq n,$$

   demuéstrese que $\max\limits_{\overline{\Omega}}\ u = \max\limits_{\partial\Omega}\ u$ y que $\max\limits_{\overline{\Omega}}\ u$ no se alcanza en Ω.

   (b) **(2 puntos)** Pruébese que si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfacen, además,

$$\Delta u(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}(x) > 0,\ \forall\ x \in \Omega,$$

$$\Delta v(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i v_{x_i}(x) < 0,\ \forall\ x \in \Omega,$$

   entonces

$$u(x) \leq v(x),\ \forall\ x \in \partial\Omega \Longrightarrow u(x) \leq v(x),\ \forall x \in \overline{\Omega}$$

Soluciones, 10/07/2019 A. Cañada

1. (a)
$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{p} a_i \operatorname{sen}(n_i x)\cos(n_i t) + \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{m_j} \operatorname{sen}(m_j x)\operatorname{sen}(m_j t)$$

1. (b) $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$

$$\left.\begin{array}{l} v_{xx} = v_{tt} \\ v(x,0) = 3\operatorname{sen}(4x) - s(x) \\ v_t(x,0) = 0 \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} (1) \qquad \left.\begin{array}{l} s''(x) = -\operatorname{sen}(2x) \\ s(0) = s(\pi) = 0 \end{array}\right\} (2)$$

De (2) obtenemos $s(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

Sustituyendo en (1), $v(x,t) = 3\operatorname{sen}(4x)\cos(4t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\cos(2t)$

Por tanto, $u(x,t) = 3\operatorname{sen}(4x)\cos(4t) - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)\cos(2t) + \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{4}$

2. (a) $u(x,t) = \cos(3x)e^{-9t} + \pi\operatorname{sen}(\sqrt{2}x)e^{-2t}$

(b) $u(x_1,x_2,t) = \cos(x_1+2x_2)e^{-5t}$

(c) $u(x_1,x_2,x_3,t) = \operatorname{sen}(x_1+\sqrt{3}x_3)\,e^{-4t}$

3. (a) Sea $x_0 \in \overline{\Omega}$ / $\max_{\overline{\Omega}} u = u(x_0)$

Si $x_0 \in \partial\Omega$, está probado

Ahora bien, $x_0 \in \Omega$ no es posible, puesto que si $x_0 \in \Omega$, entonces

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u(x_0)}{\partial x_i^2} \leq 0,\ 1 \leq i \leq n \\ u_{x_i}(x_0) = 0,\ 1 \leq i \leq n \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta u(x_0) + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i}(x_0) \leq 0 \ \text{¡!}$$

(b) Tómese la función $w = u - v$ y aplíquese el resultado anterior a la función w.