ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS, 18/06/2019

1. (a) **(1 punto)** Considérese la ecuación de ondas

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2,\ u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}) \tag{1}$$

   Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

   (b) **(3 puntos)** Si $f \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$, demuéstrese que la función

$$\omega(x,t) \equiv \frac{1}{2}\int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\,dy\right) ds$$

   verifica

$$\omega \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}),\ \omega_{tt}(x,t) - \omega_{xx}(x,t) = f(x,t)\ ,\quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{2}$$

2. **(3 puntos)** Encuéntrese la única solución acotada del problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0; \quad u(x,0) = e^{-\pi x^2},\ x \in \mathrm{R}$$

3. (a) **(1 punto)** Enúnciese la propiedad de la media para funciones armónicas, en las dos versiones: bolas y esferas n-dimensionales, explicando brevemente el tipo de integrales que aparecen en dicha propiedad .

   (b) **(2 puntos)** Teniendo en cuenta el apartado anterior, enúnciese y pruébese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas en subconjuntos de R^n que sean abiertos, acotados y conexos.

E.D.P. 18/06/2019 Soluciones (A. Cañada)

1. a) El conjunto $\{\operatorname{sen}(nx)\cos(nt),\ n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de soluciones, linealmente independientes (tómese, por ejemplo, $t=0$) y con infinitos elementos.

1. b) Hecho en clase.

2. Para $t>0$,

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}} \cdot e^{-\pi \xi^2} \, d\xi =$$

$$= \cdots = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left[\frac{\xi\sqrt{1+4\pi t}}{\sqrt{4t}} - \frac{x\sqrt{4t}}{4t\sqrt{1+4\pi t}} \right]^2} d\xi \cdot$$

$$\cdot e^{-\frac{x^2}{4t}} e^{\frac{x^2(4t)}{16t^2(1+4\pi t)}} = \left(\frac{\xi\sqrt{1+4\pi t}}{\sqrt{4t}} = u \right)$$

$$= \cdots = \frac{1}{\sqrt{1+4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{1+4\pi t}}$$

Así
$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{1+4\pi t}} e^{-\frac{\pi x^2}{1+4\pi t}}, & t>0 \\ e^{-\pi x^2} & \text{si } t=0 \end{cases}$$

3. a), 3. b): Hechos en clase.