ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 25/05/2018.

1. En cada uno de los apartados que siguen propóngase la fórmula que proporciona la única solución acotada de los problemas planteados y compruébese rigurosamente que la fórmula propuesta es correcta.
   (a) (**1 punto**) $u_t = u_{x_1x_1},\ u(x_1,0) = \sqrt{3}\cos x_1 - \pi \mathrm{sen}(8x_1) + e^3\cos(\sqrt[4]{5}x_1),\ x_1 \in \mathrm{R},$ $t \geq 0.$
   (b) (**1 punto**) $u_t = \Delta_{(x_1x_2)}u,\ u(x_1,x_2,0) = \cos^2(\frac{x_1+x_2}{2}),\ (x_1,x_2) \in \mathrm{R}^2,\ t \geq 0.$
   (c) (**1 punto**) $u_t = \Delta_{(x_1\ldots x_n)}u,\ u(x_1,...,x_n,0) = \mathrm{sen}(x_1+...+x_n),$ $(x_1,\ldots,x_n) \in \mathrm{R}^n,\ t \geq 0.$

2. Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) (**1 punto**) Si $f \equiv 0$, la única solución de (1) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \mathrm{sen}(3x)$, la única solución de (1) es $u(x,t) = \mathrm{sen}(3x)e^{-9t}$. Si

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ \mathrm{sen}(3x),\ \text{si } \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi \end{cases} \tag{2}$$

   Demuéstrese rigurosamente que la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0,\ \text{si } 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{3}, \\ \mathrm{sen}(3x)e^{-9t},\ \text{si } \dfrac{\pi}{3} \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

   no es solución de (1)
   (b) (**1 punto**) Propóngase, en forma de serie de funciones, la fórmula que proporciona la única solución de (1) para la función f dada en (2).
   (c) (**1 punto**) Calcúlense, explícitamente, los términos tercero y quinto de dicha serie de funciones.

3. (**2 puntos**) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas en n variables.

4. (**2 puntos**) Calcúlese la única solución del problema de contorno

$$\Delta u(x) = \|x\|^5,\ x \in \Omega \equiv B_{\mathrm{R}^2}(0;2), \quad u(x) = 0,\ x \in \partial\Omega$$