ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS

Cuarto curso, 05/04/2019.

1. (a) **(1 punto)** Considérese la ecuación

$$u_{xx}(x,y) + 2u_{xy}(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2,\ u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}) \tag{1}$$

Demuéstrese (sin usar los apartados que siguen), que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

(b) **(1 punto)** Mediante el cambio de variables independientes $\xi = y - 2x,\ \mu = y$, demuéstrese que la ecuación (1) es equivalente a la ecuación

$$v_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ \forall\ (\xi,\mu) \in \mathrm{R}^2,\ v \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$$

(c) **(1 punto)** Teniendo en cuenta los apartados anteriores, encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (1).

2. (a) **(3 puntos)** Considérese el problema

$$\begin{array}{c} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = \mathrm{sen}(5x),\ (x,t) \in \Omega, \\ u(x,0) = 2\mathrm{sen}x,\ u_t(x,0) = \sqrt{2}\mathrm{sen}(3x),\ 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

donde $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 : 0 < x < \pi,\ t > 0\}$.
Usando el método de la energía, pruébese que (2) tiene, a lo sumo, una solución.

(b) **(4 puntos)** Encuéntrese la única solución de (2).

Soluciones 5/4/2019 A. Cañada

1 (a) El conjunto $\{\operatorname{sen}(ny), n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto de soluciones de (1), linealmente independiente y con infinitos elementos.

1 (b) $\begin{cases} \xi = y - 2x \\ \mu = y \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{\mu - \xi}{2} \\ y = \mu \end{cases}$

$$u(x,y) \equiv u(x(\xi,\mu), y(\xi,\mu)) \equiv v(\xi,\mu) \equiv v(\xi(x,y), \mu(x,y))$$

$$u_x = v_\xi(-2) + v_\mu \cdot 0 \; ; \; u_{xx} = 4 v_{\xi\xi} \; ; \; u_{xy} = v_{\xi\xi}(-2) + v_{\xi\mu} \cdot 1$$

Así $u_{xx} + 2u_{xy} = 2 v_{\xi\mu}$

1 (c)

$$v_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0 \iff v(\xi,\mu) = F(\xi) + G(\mu), \; F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$$

Por tanto el conjunto de soluciones de (1) es

$$\{F(y-2x) + G(y), \; F, G \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})\}$$

2 (a) Hecho en clase.

2 (b) $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$, ¿$v(x,t)$? ¿$s(x)$?

$$\left.\begin{array}{l} -s''(x) = \operatorname{sen}(5x) \\ s(0) = s(\pi) = 0 \end{array}\right\} \; s(x) = \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)$$

$$\left.\begin{array}{l} (v_{tt} - v_{xx})(x,t) = 0 \\ v(x,0) = 2\operatorname{sen} x - \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x) \\ v_t(x,0) = \sqrt{2}\operatorname{sen}(3x) \\ v(0,t) = v(\pi,t) = 0 \end{array}\right\} \; v(x,t) = 2\operatorname{sen} x \cos t - \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)\cos(5t) + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{sen}(3x)(\operatorname{sen} 3t) + \cdots$$

Por tanto,

$$u(x,t) = 2\operatorname{sen} x \cos t - \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)\cos(5t) + \frac{\sqrt{2}}{3}\operatorname{sen}(3x)(\operatorname{sen} 3t) + \frac{1}{25}\operatorname{sen}(5x)$$