## ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
## GRADO EN MATEMÁTICAS, 31/05/2019

1. (a) **(1 punto)** Enunciado del principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional, definiendo rigurosamente el concepto de frontera parabólica.

   (b) i. **(1 punto)** Demuéstrese que $\text{sen}^3(x) = \dfrac{3}{4}\,\text{sen}(x) - \dfrac{1}{4}\,\text{sen}(3x)$ , $\forall x \in \text{R}$.

   ii. **(3 puntos)** Teniendo en cuenta el apartado anterior, escríbase la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \text{sen}^3(x) - \pi^2\text{sen}(8x), \quad 0 \leq x \leq \pi$$

2. Considérese la ecuación de Laplace $n$-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

   (a) **(2 puntos)** Demuéstrese que si $u \in C^2(\text{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \text{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces (1) es equivalente a la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0,+\infty) \tag{2}$$

   (b) **(3 puntos)** Teniendo en cuenta el apartado anterior, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x,y) = x^2 + y^2,\ 4 < x^2 + y^2 < \text{e}^2,$$

$$u(x,y) = 3,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = 4; \quad u(x,y) = \pi,\ \text{si}\ \ x^2 + y^2 = \text{e}^2$$

Soluciones 31/05/2019

1. a) Explicado en clase.

1. b) i Explicado en clase.

1. b) ii)

$$u(x,t) = \frac{3}{4}\operatorname{sen}(x)e^{-t} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}(3x)e^{-9t} - \pi^2\operatorname{sen}(8x)e^{-64t}$$

2. a) Explicado en clase.

2. b) Expresando el problema "de manera radial", tenemos:

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = r^2 \quad , \quad 2 < r < e$$

$$v(2) = 3 \quad , \quad v(e) = \pi$$

$$v'(r) \equiv z(r), \qquad z'(r) + \frac{1}{r} z(r) = r^2$$

$$z(r) = e^{-\int \frac{1}{r}dr}\left[C + \int e^{\int \frac{1}{r}dr} \cdot r^2\, dr\right] =$$

$$= \frac{C}{r} + \frac{r^3}{4}$$

$$v(r) = \int z(r)\,dr = C \ln r + \frac{r^4}{16} + D$$

¿C, D?
$$\left.\begin{aligned} v(2) &= C\ln 2 + 1 + D = 3 \\ v(e) &= C + \frac{e^4}{16} + D = \pi \end{aligned}\right\}$$