ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 13/04/2018.

1. (a) **(1 punto)** Dedúzcase, razonadamente, la fórmula que proporciona todas las soluciones de la ecuación

$$u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 \ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2,\ u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R}) \tag{1}$$

(b) **(4 puntos)** Si $f \in C^1(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$, demuéstrese que la función

$$v(x,t) \equiv \frac{1}{2} \int_0^t \left(\int_{x-t+s}^{x+t-s} f(y,s)\, dy \right) ds$$

verifica

$$v_{tt}(x,t) - v_{xx}(x,t) = f(x,t) \ , \quad \forall (x,t) \in \mathrm{R}^2, \tag{2}$$

calculando para ello las derivadas de segundo orden que aparecen en (2) *(Sugerencia: recuérdese que* $\dfrac{\partial \left(\int_0^t H(x,t,s)\, ds \right)}{\partial t} = H(x,t,t) + \displaystyle\int_0^t \frac{\partial H(x,t,s)}{\partial t}\, ds$*).*

(c) **(1 punto)** Teniendo en cuenta los dos apartados previos, propóngase una fórmula que proporcione todas las soluciones de (2).

(d) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + b\ u_y(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{3}$$

donde b es una constante real.

i. (**1 punto)** Sin resolver la ecuación (3), demuéstrese que el conjunto de soluciones ($u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$) de (3) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

ii. (**3 puntos)** Encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (3).
Sugerencia: Si $h \in C(\mathrm{R}, \mathrm{R})$, todas las soluciones de la e.d.o. de primer orden

$$v'(x) + bv(x) = h(x),\ x \in \mathrm{R},$$

son de la forma

$$v(x) = e^{-bx} \left[c + \int e^{bx} h(x)\ dx \right],\ c \in \mathrm{R}.$$