CAPÍTULO IV: EL PROBLEMA DE CAUCHY [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Noción de problema de Cauchy (o problema de valores iniciales, p.v.i.) para una e.d.o. Teorema de existencia y unicidad de soluciones de un p.v.i. para un sistema de e.d.o. (Teorema de Picard-Lindelöf). Teorema de regularidad de la solución general, respecto de los parámetros que aparecen en la e.d.o.
2. Teorema de la función inversa para funciones de varias variables reales.
3. Fórmula de Green en el plano (no imprescindible).

Se pueden consultar las referencias:

1. E.A. Coddington y N. Levinson. Theory of ordinary differential equations. McGraw-Hill, Book Company, Inc., New York-Toronto-London, 1.955.
2. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1.960.

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El capítulo comienza con el estudio del problema de Cauchy para la ecuación del calor

$$(1) \qquad \begin{array}{c} u_t(x,t) = \Delta_x u(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Si $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : t > 0\}$, una solución de (1) es una función $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ que verifica (1) puntualmente. En consonancia con esto, suponemos $\varphi \in C(\mathbb{R}^n)$.
La primera nota de interés es que, en general, (1) no tiene solución única. Por ejemplo, si

$$f(t) = \begin{cases} \exp(-1/t^2),\ t \neq 0, \\ 0,\ t = 0 \end{cases}$$

una solución no trivial de (1) para $\varphi \equiv 0$ es la función $u(x,t) = \sum_{n \geq 0} f^{n)}(t) \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.
Usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor puede probarse que (1) tiene, a lo sumo, una solución acotada. Se trataría ahora de probar existencia,

[1] A. Cañada, Mayo 2007, EDP

imponiendo que φ sea una función acotada. Vamos por partes. Una versión del principio del máximo mínimo es el objeto del próximo teorema.

Teorema 1.. *Sea ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^n$ y $T > 0$. Notemos $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega,\ 0 < t < T\}$. Entonces si $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ verifica*

$$u_t - \Delta_x u \leq 0,\ \text{en } \Omega, \tag{2}$$

se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial_1 \Omega} u, \tag{3}$$

donde $\partial_1\Omega$ es la denominada frontera parabólica de Ω que se define como

$$\partial_1(\Omega) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \partial\omega,\ 0 \leq t \leq T\} \cup \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ x \in \omega,\ t = 0\}.$$

Para la demostración, primero se considera el caso en que se tiene una desigualdad estricta en (2) y el dominio es $\Omega_\varepsilon = \{(x,t) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in \omega, 0 < t \leq T - \varepsilon\}$. Después se hace tender ε a cero. Para el caso en que en (2) se tiene una desigualdad no estricta, se considera la función auxiliar $v(x,t) = u(x,t) - kt$, con k conveniente.
Usando el principio del máximo-mínimo en dominios de la forma $\Omega = B_{\mathbb{R}^n}(0;R) \times (0,T)$, puede probarse la unicidad de soluciones acotadas de (1). La existencia es cosa aparte. Por cierto, que para motivar la fórmula que define la solución se usan algunas nociones elementales de la transformada de Fourier. De hecho, esta es una de las motivaciones más bonitas que conozco de la noción de transformada de Fourier, donde se pone de manifiesto el paso del caso discreto (series), al caso continuo (transformada integral). Las ideas fundamentales son las siguientes:

En primer lugar, simplificamos la situación suponiendo que $n = 1$ y que para φ acotada, buscamos soluciones u acotadas. La búsqueda de soluciones de la forma particular $u(x,t) = X(x)T(t)$, da lugar a las e.d.o.

$$\begin{aligned} X''(x) \ &- \ \lambda X(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) \ &- \ \lambda T(t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

Es elemental probar que la primera ecuación tiene soluciones no triviales acotadas si y solamente si $\lambda \leq 0$, de tal manera que, en adelante, sólo nos interesarán estos valores del parámetro λ. Así pues, las anteriores ecuaciones pueden escribirse de la forma

$$\begin{aligned} X''(x) \ &+ \ \lambda^2 X(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}, \\ T'(t) \ &+ \ \lambda^2 T(t) = 0,\ t > 0. \end{aligned}$$

Esto permite afirmar que, para λ un número real cualquiera, la función

$$A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x}$$

con $A(\lambda)$ una constante (que depende de λ), es una solución (compleja) acotada de la ecuación del calor.
Si la función $\varphi(x)$ fuese de la forma $\varphi(x) = c\, e^{i\lambda x}$ para algún λ y c reales, el problema estaría resuelto; ahora bien, esto no es así en general, de tal forma que la pregunta básica puede ser la siguiente:

¿ Será posible calcular la (única) solución acotada de (1) teniendo en cuenta de alguna manera todas las soluciones acotadas anteriores?. Una manera intuitiva de hacer esto es "sumar" todas las soluciones, es decir, considerar la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{-\lambda^2 t + i\lambda x} \, d\lambda,$$

donde $A(\lambda)$ se debe escoger para que

$$u(x,0) = \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\lambda) e^{i\lambda x} \, d\lambda.$$

De la teoría de Transformada de Fourier se sabe que, cuando φ y A cumplen algunas condiciones adicionales (por ejemplo, $\varphi, A \in L^1(\mathbb{R})$), entonces

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) e^{-i\lambda y} \, dy.$$

Sustituyendo la anterior expresión, agrupando convenientemente y teniendo en cuenta que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(u-i\alpha)^2} \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} \, du = (\pi)^{1/2}, \ \forall \ \alpha \in \mathbb{R},$$

llegamos finalmente a que la única solución acotada de (1) puede ser la función

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,\xi,t) \varphi(\xi) \, d\xi, \quad \text{para} \ \ t > 0,$$

donde

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

Para n arbitrario, la función que se obtiene en el proceso anterior, es

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\ -\|x-\xi\|^2/4t},$$

a la que se llama núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor.
Al final el teorema queda como sigue.

Teorema 2.. *Si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continua y acotada, la única solución acotada de (1) viene dada por la fórmula*

$$u(x,t) = \begin{cases} (4\pi t)^{-n/2} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x-\xi\|^2/4t) \varphi(\xi) \, d\xi, \ t > 0, \\ \varphi(x), \ t = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Además, u es de clase C^∞ para $t > 0$.

La demostración usa las siguientes propiedades (de comprobación inmediata) del núcleo K :
1) $K \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0,\infty))$.
2) $\left(\dfrac{\partial}{\partial t} - \Delta_x \right) K(x,\xi,t) = 0, \ \forall \ t > 0.$

3) $K(x,\xi,t) > 0, \ \forall\ t > 0$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi,t)\ d\xi = 1, \forall\ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall\ t > 0.$

4) Para cualquier $\delta > 0$, se tiene

$$\lim_{t \to 0^+} \int_{\|\xi - x\| > \delta} K(x,\xi,t)\ d\xi = 0,$$

de manera uniforme para $x \in \mathbb{R}^n$.

Una vez puestas de manifiesto las propiedades básicas de K, la comprobación de que $u \in C^\infty(\Omega)$ es trivial así como que u satisface el problema (1). La continuidad de u en $\overline{\Omega}$ puede probarse teniendo en cuenta la igualdad

$$u(x,t) - \varphi(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x,y,t)(\varphi(y) - \varphi(\xi))\ dy$$

y a continuación expresando la integral anterior como suma de dos sumandos, donde en el primero de ellos, ξ está "cerca"de x; por último, teniendo en cuenta la continuidad de φ se prueba que $u \in C(\overline{\Omega})$.

El capítulo continua con el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas. Comenzamos estudiando el mismo para la ecuación de ondas en dimensión uno, tanto homogénea (método de propagación de las ondas) como no homogénea. La segunda parte la dedicamos al estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. El método utilizado aquí se conoce con el nombre de método de las medias esféricas y permite resolver el problema citado (con la ayuda de la solución del problema unidimensional) cuando la dimensión de las variables espaciales es impar. El método del descenso resuelve, a partir del caso anterior, el caso en que tal dimensión es par.

Este capítulo es muy adecuado para que los alumnos saquen conclusiones en relación con los diferentes tipos de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. Por ejemplo, debe destacarse el hecho de que no cabe esperar la existencia, para ecuaciones hiperbólicas, de principios del máximo-mínimo semejantes a los de ecuaciones elípticas o parabólicas. La falta de efecto regularizante sobre los datos iniciales, así como la velocidad finita de propagación de perturbaciones, son otros hechos que distinguen a las ecuaciones hiperbólicas de las parabólicas. También hay semejanzas y, por ejemplo, la manera de solucionar el problema de Cauchy no homogéneo en dimensión uno, está basada en la obtención de una fórmula integral de representación de funciones regulares que utiliza ahora las derivadas parciales propias de la ecuación de ondas (fórmulas análogas se prueban en el caso parabólico).
Incluso, moviéndonos dentro del tema de la ecuación de ondas, se observan notables diferencias dependiendo de que la dimensión de las variables espaciales sea impar o par (por ejemplo, el principio de Huygens es válido en dimensión 3 y no en dimensión 2. También, lo que es el dominio de dependencia de un punto, cambia con el problema considerado. Creo que la sensación (no desprovista de razón) puede ser que la variedad es tan grande, que habría que considerar los distintos casos por separado;

sin embargo, nada más lejos de la realidad, pues cuando se desarrolla con detalle la teoría se observa que el éxito en el estudio de diversos problemas depende en gran parte de otros que se deben haber estudiado previamente (por ejemplo, la ecuación de ondas en dimensiones superiores se estudia aprovechando el estudio realizado en el caso unidimensional; también, la ecuación de ondas no homogénea en dimensiones superiores se estudia a través de los resultados obtenidos para el caso homogéneo). En definitiva, se pone de manifiesto una característica de toda la Matemática: la diversidad de métodos, situaciones y conclusiones diferentes que pueden presentarse, pero también la íntima relación que en muchísimas ocasiones existe entre ellos.

El problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno se escribe como

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Observemos que las condiciones iniciales se dan sobre la recta $t = 0$ que no es una curva característica de la ecuación de ondas (de hecho, las curvas características son de la forma $h(t,x) = 0$, donde $h_t^2 - h_x^2 = 0$). Además, sobre la curva inicial se dan dos datos: la solución u y el valor de su derivada normal, respecto de la curva citada.

Indicaremos por Ω al conjunto

$$\Omega = \ \{\ (x,t) \in \mathbb{R}^2\ :\ t > 0\ \}.$$

Una solución de (5) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, que verifica (5) en todo punto.

El próximo resultado se refiere a la existencia y unicidad de soluciones de (5). La fórmula que aparece en él se llama fórmula de D'Alembert.

Teorema 3.. *Si $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$ y $\beta \in C^1(\mathbb{R})$, (5) tiene una única solución dada por la fórmula*

$$\begin{aligned} u(x,t)\ &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t)\ +\ \alpha(x-t)]\ +\ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds, \\ &\forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned} \tag{6}$$

En la demostración se usa el cambio de variable $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, que transforma la ecuación $u_{tt} - u_{xx} = 0$ en $u_{\xi\mu} = 0$. Por tanto, cualquier solución de (5) debe ser de la forma

$$u(x,t) = H(x+t)\ +\ G(x-t),$$

donde $H \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y $G \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Imponiendo las condiciones iniciales se llega fácilmente a la conclusión de que

$$H(x) = \frac{1}{2}\ \alpha(x)\ +\ \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s)\ ds\ +\ c_1,$$

$$G(x) = \frac{1}{2}\ \alpha(x)\ -\ \frac{1}{2}\int_0^x \beta(s)\ ds\ +\ c_2,$$

donde c_1, c_2 son constantes a determinar. Usando que $u(x,0) = \alpha(x)$, se obtiene $c_1 + c_2 = 0$, por lo que se obtiene (6).

1) La solución dada por (6) se puede escribir de la forma

$$\begin{aligned} u(x,t) \quad &= \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t} \beta(s)\ ds\right]\ + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t} \beta(s)\ ds\right], \end{aligned}$$

o sea,

$$u(x,t) = u_1(x,t)\ +\ u_2(x,t),$$

donde

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)\ +\ \int_0^{x+t} \beta(s)\ ds\right],$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}\left[\alpha(x-t)\ -\ \int_0^{x-t} \beta(s)\ ds\right].$$

Así, u es "suma o superposición de dos ondas" u_1 y u_2, que se desplazan, respectivamente, a la izquierda y a la derecha, con velocidad uno. De aquí, que al método utilizado en la demostración del teorema 3, se le llame método de propagación de las ondas.

2) Notemos en segundo lugar que la ecuación de ondas no tiene efecto regularizante sobre los datos iniciales, puesto que de (6) no cabe esperar que u tenga más regularidad que α.

3) De (6), se obtiene que el valor de u en un punto (x_0, t_0) de Ω, depende de los valores de α en los puntos $x_0 + t_0$ y $x_0 - t_0$ así como de los valores de β en el intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$; de aquí que al intervalo $[x_0 - t_0, x_0 + t_0]$ se le llame **dominio de dependencia** del punto (x_0, t_0).
Precisamente, el dominio de dependencia de un punto (x_0, t_0), viene determinado por los puntos de intersección de las dos rectas características que lo contienen, es decir, las rectas de ecuaciones

$$\begin{aligned} x + t &= x_0 + t_0, \\ x - t &= x_0 - t_0, \end{aligned}$$

con el eje $t = 0$.
Al triángulo determinado por los puntos $(x_0, t_0), (x_0 - t_0, 0)$ y $(x_0 + t_0, 0)$ se le denomina triángulo característico del punto (x_0, t_0).

4) Los efectos de las perturbaciones no son instantáneos, como en el caso de la ecuación del calor, sino que éstas se propagan ahora con velocidad finita. Tal afirmación se puede comprender fácilmente si se considera el caso en que las funciones α y β son ambas idénticamente nulas; entonces la única solución de (5) es la función $u \equiv 0$. Si mantenemos $\beta \equiv 0$ y tomamos una función α que sea no nula y positiva solamente "cerca"de un punto dado $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces si x_1 es cualquier otro punto diferente de x_0, el valor $u(x_1, t)$ será cero para pequeños valores de t, (aunque no para valores "grandes"de t). Esto se puede cuantificar perfectamente teniendo en cuenta quién es el dominio de dependencia del punto (x_1, t).

5) Dado $(x_0, 0)$, el dominio de influencia de éste punto será el conjunto de todos aquellos puntos de Ω tales que su dominio de dependencia incluya al punto x_0.

Pasamos a continuación a considerar el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea:

$$
\begin{array}{c}
u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t), \; x \in \mathbb{R}, \; t > 0, \\
u(x,0) = \alpha(x), \; x \in \mathbb{R}, \\
u_t(x,0) = \beta(x), \; x \in \mathbb{R}.
\end{array} \tag{7}
$$

Como en (5), una solución de (7) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que cumple (7) puntualmente.

El estudio del problema anterior se va a realizar obteniendo una fórmula integral que representa a cualquier función regular en $\overline{\Omega}$, utilizando para ello las derivadas parciales que aparecen en la ecuación de ondas.

Lema 4.. *Sea $(x_0, t_0) \in \Omega$ y T su triángulo característico. Entonces si u es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene*

$$
\begin{aligned}
u(x_0, t_0) \;&= \frac{1}{2}\,[u(x_0 + t_0, 0) \;+\; u(x_0 - t_0, 0)\,] \;+ \\
&+ \frac{1}{2} \int_{x_0 - t_0}^{x_0 + t_0} u_t(s, 0)\; ds \;+ \\
&+ \frac{1}{2} \int_T (u_{tt} - u_{xx})(\xi, \tau)\; d\xi d\tau.
\end{aligned} \tag{8}
$$

Para la demostración se procede como sigue: Por la fórmula de Green en el plano, se tiene

$$\int_T (u_{\tau\tau} - u_{\xi\xi})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau = \int_{\partial T} (-u_t(\xi,\tau)\ d\xi - u_x(\xi,\tau)\ d\tau,$$

donde ∂T está orientada positivamente.
La integral de línea anterior se descompone en tres sumandos, correspondientes, respectivamente, a los lados del triángulo T. Parametrizando cada uno de estos lados, se pueden calcular de manera explícita las integrales resultantes, obteniéndose (8).

Escribiendo la integral

$$\int_T (u_{tt} - u_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau$$

de la forma

$$\int_0^{t_0} \int_{\tau+x_0-t_0}^{-\tau+x_0+t_0} (u_{tt} - u_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau,$$

se dispone de una fórmula que proporciona la posible solución de (7). Esto se confirma en el siguiente teorema:

Teorema 5.. *Sean* $\alpha \in C^2(\mathbb{R}),\ \beta \in C^1(\mathbb{R})$ *y* $f, \dfrac{\partial f}{\partial x} \in C(\overline{\Omega})$.
Entonces la única solución de (7) es

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}[\alpha(x+t)\ +\ \alpha(x-t)] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} \beta(s)\ ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} f(\xi,\tau)\ d\xi d\tau, \\ &\forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

Seguidamente nos planteamos el estudio del problema de Cauchy para la ecuación de ondas en dimensiones superiores a uno. Se realizará de manera detallada para los casos $n = 2$ y $n = 3$, representativos de lo que ocurre, respectivamente, para n par e impar, generales.

Sea el problema

$$\text{(9)} \qquad \begin{array}{c} u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt},\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ t > 0, \\ u(x,y,z,0) = \phi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,y,z,0) = \psi(x,y,z),\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3. \end{array}$$

Si $\Omega = \{\ (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4\ :\ t > 0\ \}$, una solución de (9) es una función $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisface (9) en todo punto.

El método que vamos a utilizar para solucionar (9) se denomina método de las medias esféricas y sus ideas fundamentales son las siguientes:

1) Si u es cualquier solución de (9) y $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ es un punto dado, se puede definir la función

$$I(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} u(y_1,y_2,y_3,t)\ ds,$$

donde $S((x,y,z);\ r)$ es la esfera centrada en (x,y,z), de radio r, y la integral anterior es una integral de superficie en las variables (y_1,y_2,y_3).

Claramente, la función anterior, llamada media esférica de u, está definida para cualquier $r > 0$ y cualquier $t \geq 0$. Además, los valores $I(r,0)$, $I_t(r,0)$, se calculan a partir de los datos iniciales de (9); en efecto,

$$I(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \phi(y_1,y_2,y_3)\ ds \equiv F(r),$$
$$I_t(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \int_{S((x,y,z);\ r)} \psi(y_1,y_2,y_3)\ ds \equiv G(r).$$

2) El objetivo es, a partir de las funciones F y G, calcular $I(r,t)$. Posteriormente, observando que la continuidad de u, implica

$$u(x,y,z,t) = \lim_{r\to 0^+} I(r,t),$$

llegaríamos a una expresión para la función u, que tendríamos que demostrar que define una solución de (9).

La anterior discusión permite enunciar y probar el siguiente teorema sobre existencia y unicidad de soluciones de (9):

Teorema 6.. *Si* $\phi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ *y* $\psi \in C^2(\mathbb{R}^3)$, *el problema de Cauchy (9) tiene una única solución* u *dada, para* $t > 0$, *por*

$$(10) \qquad \begin{aligned} u(x,y,z,t) &= \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \phi(Y)\ ds_Y\right] + \\ &+ \frac{1}{4\pi t}\int_{S((x,y,z);\ t)} \psi(Y)\ ds_Y, \end{aligned}$$

Merece la pena realizar algunos comentarios sobre la conclusión del teorema anterior, y compararlos con los que hicimos sobre la solución del problema de Cauchy para la ecuación de ondas homogénea en dimensión uno. Por ejemplo, el valor $u(X,t)$ depende de los valores de ψ, ϕ y de los de las derivadas parciales de primer orden de la función ϕ en la esfera centrada en X y de radio t (principio de Huygens). Así, este conjunto puede considerarse ahora como el dominio de dependencia de un punto (X,t). Recíprocamente, los datos iniciales ϕ y ψ cerca de un punto X_0 del hiperplano $t=0$, sólo tienen influencia en los valores $u(X,t)$ para aquellos puntos (X,t) que están "cerca"del cono $|X-X_0|=t$. Por tanto, si ϕ y ψ tienen soporte contenido en algún subconjunto D de $\mathbb{R}^3$, para que $u(X,t)$ no sea cero, el punto X debe pertenecer a alguna esfera de radio t con centro en algún punto $Y\in D$. La unión de todas estas esferas contiene al soporte de la función u en el tiempo t. Esto es típico de las soluciones de la ecuación de ondas en dimensiones impares.

Seguidamente, aprovechamos los resultados obtenidos sobre el problema (9), para estudiar el problema de Cauchy en dimensión dos:

$$
\begin{array}{c}
u_{xx}+u_{yy}=u_{tt},\ (x,y)\in \mathbb{R}^2,\ t>0,\\
u(x,y,0)=\phi(x,y),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2,\\
u_t(x,y,0)=\psi(x,y),\ (x,y)\in \mathbb{R}^2.
\end{array}
\tag{11}
$$

Si $\Omega=\ \{\ (x,y,t)\in \mathbb{R}^3\ :\ \ t>0\ \}$, una solución de (11) es cualquier función $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ que satisfaga (11) en todo punto.

A partir de la fórmula que proporciona la única solución de (9), aplicaremos el llamado **método del descenso** para encontrar la fórmula de la solución de (11).

Teorema 7. . *Si $\phi\in C^3(\mathbb{R}^2)$ y $\psi\in C^2(\mathbb{R}^2)$, el problema (11) tiene una única solución dada por*

$$
\begin{aligned}
u(x,y,t) &= \frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\le 1}\frac{\psi(x+t\xi_1,y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\ d\xi_1 d\xi_2\ + \\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{2\pi}\int_{|\xi|\le 1}\frac{\phi(x+t\xi_1,y+t\xi_2)}{(1-\xi_1^2-\xi_2^2)^{1/2}}\ d\xi_1 d\xi_2\right].
\end{aligned}
\tag{12}
$$

Quizás la novedad más importante sea lo que es ahora el dominio de dependencia de un punto (x,y,t) de Ω. Claramente se observa, a partir de las dos fórmulas anteriores, que éste debe ser la bola euclídea cerrada de centro (x,y) y radio t. Esto marca una profunda diferencia entre los casos $n=3$ (donde es válido el principio de Huygens) y $n=2$ (donde tal principio no se verifica).

En la última parte del tema nos ocupamos del problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea. Respecto de la existencia de soluciones, puede utilizarse el llamado método de Duhamel, que recuerda al método de variación de las constantes, utilizado para resolver ecuaciones diferenciales lineales no homogéneas, supuesto que la ecuación homogénea puede resolverse (como es nuestro caso). Dicho método consiste en "sumar de manera continua", es decir, integrar, toda una familia uniparamétrica de soluciones de problemas de Cauchy del tipo que ya hemos estudiado.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A.V. Bitsadze: Equations of Mathematical Physics. Mir Publishers, 1980.
2. F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.
3. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.
4. A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

1. Es también de interés el estudio del problema de Cauchy para ecuaciones casilineales de primer orden, de la forma

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{13}$$

Este tipo de ecuaciones aparece, por ejemplo, en Dinámica de poblaciones (ecuación de Mckendrik-Von Foerster), así como en diversos problemas de Geometría y Óptima Geométrica. El problema de Cauchy se plantea como el estudio de la existencia (unicidad, etc.) de soluciones de la ecuación anterior tales que la superficie integral asociada contenga a una curva dada Γ del espacio euclídeo tridimensional.
Es fácil motivar con ejemplos que, a diferencia de lo que ocurre con e.d.o., la regularidad de los coeficientes a, b y c, así como de la curva inicial Γ, no es suficiente para la existencia de solución. Por ejemplo, el problema $u_x + u_y = u,\ \Gamma(s) = (s,s,1)$ no tiene solución. Ante la sorpresa del alumno por este hecho, que marca una diferencia profunda con las e.d.o., se recurre a la interpretación geométrica del concepto de solución para intuir las hipótesis de lo que puede ser un teorema de existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy. Se llega a la conclusión de que las superficies integrales de (13) son aquellas tales que en cada punto de la misma son tangentes al campo de vectores (llamado campo característico) definido por las funciones (a,b,c). Claramente esto sugiere que la superficie integral ha de estar formada por curvas características: soluciones del sistema (característico) de e.d.o.

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u),\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u),\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u).$$

Llegados a este punto, se puede intuir que la superficie integral que contenga a Γ debe estar formada por todas las curvas características que se apoyan en los puntos de Γ. Ahora bien, este proceso no está exento de dificultades. Por ejemplo, Γ no debe ser una curva característica; esto da lugar a la condición de transversalidad que aparece en el teorema. Además todas esas curvas deben "pegarse" bien, para que originen una superficie; esto no será problema usando la regularidad de los coeficientes y el teorema de la función inversa. En el teorema siguiente se afirma que si los coeficientes de la ecuación (13) son regulares y la curva inicial no es característica, entonces el problema de Cauchy tiene solución única.

Teorema 8.. *Considérese el problema de Cauchy*

$$\begin{array}{c} a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u), \\ \Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), z_0(s)) \end{array} \tag{14}$$

donde $a, b, c \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, Ω *un dominio de* $\mathbb{R}^3$ *y* $\Gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ *una función de clase* $C^1[0,1]$ *tal que* $Im\ \Gamma \subset \Omega$. *Entonces, si se verifica (la llamada condición de transversalidad)*

$$\frac{dx_0(s)}{ds}\, b(x_0(s), y_0(s), z_0(s)) - \frac{dy_0(s)}{ds}\, a(x_0(s), y_0(s), z_0(s)) \neq 0, \ \forall\ s \in [0,1] \tag{15}$$

se tiene que (14) tiene una única solución $u \in C^2(\Omega_1)$ *donde* Ω_1 *es un subconjunto abierto de* $\mathbb{R}^2$ *que contiene al conjunto* $\{(x_0(s), y_0(s)),\ s \in [0,1]\}$.

La demostración consta de las ideas fundamentales siguientes:

a) Para cada $s \in [0,1]$, el p.v.i.

$$\frac{dx}{dt} = a(x,y,u),\ \frac{dy}{dt} = b(x,y,u),\ \frac{du}{dt} = c(x,y,u),$$
$$x(0) = x_0(s), y(0) = y_0(s), u(0) = u_0(s),$$

tiene solución única que se nota $(x(t,s), y(t,s), u(t,s))$. Esto da lugar a una función de dos variables

$$H : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0,1] \to \mathbb{R}^3,\ H(t,s) = (x(t,s), y(t,s), u(t,s))$$

que es de clase $C^1((-\varepsilon,\varepsilon) \times [0,1])$. En realidad esta es la superficie integral (dada en forma paramétrica) que verifica el problema de Cauchy.

b) Escribir (localmente) esta superficie integral en forma explícita $u = u(x,y)$. Para ello se usa el Teorema de la función inversa y la condición (14). Para la aplicación correcta del Teorema de la función inversa, conviene extender la curva inicial a una curva que siga verificando las mismas hipótesis, pero que esté definida en un intervalo abierto que contenga al $[0,1]$.

c) La unicidad local de soluciones del problema de Cauchy se prueba demostrando que cualquier superficie integral de la ecuación (13) ha de contener a las correspondientes curvas características.

d) Finalmente, usando el hecho de que la imagen de Γ es compacta, se prueba la existencia y unicidad de soluciones del problema de Cauchy dado.

2. Se puede consultar la bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo para el estudio de ecuaciones generales de primer orden de la forma $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$.
3. Versiones más generales del principio del máximo-mínimo para ecuaciones parabólicas (no necesariamente la ecuación del calor), así como diversas aplicaciones pueden consultarse en

Protter, M. y Weinberger, H.: Maximum principles in differential equations. Prentice Hall, 1967.

4. Si g es continua y acotada, la existencia de una única solución acotada del problema no homogéneo $u_t = ku_{xx} + g(x,t),\ u(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$, puede verse en
Widder, D.V. The heat equation. Academic Press, 1.975.

5. Puede demostrarse la equivalencia entre la ecuación de ondas y una cierta ecuación en diferencias, que ayuda a la aproximación numérica de las soluciones de dicha ecuación, así como al cálculo efectivo de la solución de ciertos problemas de tipo mixto. En efecto, si $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, entonces son equivalentes:
1) $u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \mathbb{R}^2$.
2) $u(P_1)+u(P_4) = u(P_2)+u(P_3)$, para cualquier cuaterna de puntos P_1, P_2, P_3, P_4, de $\mathbb{R}^2$, que sean vértices de paralelogramos característicos (sus lados son rectas características) arbitrarios, situados de tal forma que P_1 y P_4 sean vértices opuestos (y por tanto, P_2 y P_3).
No deja de llamar la atención de los alumnos el hecho de que en 2) no aparezca ninguna expresión diferencial. Para este aspecto puede consultarse: F. John. Partial Differential Equations. Springer-Verlag, New York, 1982.

EJERCICIOS

1. Encontrar la única solución acotada de los problemas siguientes:
   a) $u_t = u_{x_1x_1},\ u(x_1,0) = \cos x_1,\ t \geq 0.$
   b) $u_t = \Delta_{(x_1x_2)}u,\ u(x_1,x_2,0) = \cos(x_1+x_2),\ t \geq 0.$
   c) $u_t = \Delta_{(x_1\ldots x_n)}u,\ u(x_1,...,x_n,0) = \cos(x_1+...+x_n),\ t \geq 0.$
   d) $u_t = u_{x_1x_1},\ u(x_1,0) = \cos x_1 - 5\sin(8x_1) + 3\cos(\sqrt[4]{5}x_1),\ t \geq 0.$
   Intenta generalizar este resultado para datos $u(x_1,0)$ más generales.
2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Considérese el problema de Cauchy $u_t = u_{xx},\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\ u(x,0) = \varphi(x),\ x \in \mathbb{R}$, donde $\varphi(x) = f(a)$ si $x \leq a$, $f(x)$ si $a < x < b$, $f(b)$ si $x \geq b$. Escribir la fórmula que da la única solución acotada, $u(x,t)$ de este problema de Cauchy. Pruébese que $\lim_{t\to 0^+}\ u(x,t) = f(x)$, uniformemente en $[a,b]$. Por último, utilícese el desarrollo en serie de potencias del núcleo de la ecuación del calor para probar el Teorema de Aproximación de Weierstrass (de funciones continuas por polinomios).
3. (**Examen de Matemáticas, 16/09/2004**) Considérese el problema de Cauchy $u_{xy} = f(x,y),\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_y(x,0) = \beta(x),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ con f continua en $\mathbb{R}^2$, $\alpha \in C^2(\mathbb{R})$, $\beta \in C^1(\mathbb{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ si y solamente si se verifica $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\ x \in \mathbb{R}$.
4. Sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. Consideremos un punto $(x_0,t_0) \in \Omega$ y sea D su triángulo característico. Supongamos que existen constantes no negativas A, B y C tales que
$$|u_{tt} - u_{xx}| \leq A, \text{ en } D,$$
$$|u(x,0)| \leq B,\ |u_t(x,0)| \leq C, \text{ en } [x_0 - t_0, x_0 + t_0].$$

Demuéstrese que $|u(x_0,t_0)| \le B + Ct_0 + At_0^2/2$.

5. Sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^1(\overline{\Omega}),\ \Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$. Consideremos un punto $(x_0,t_0) \in \Omega$ y sea D su triángulo característico. Supongamos que u verifica
$$u_{xx} - u_{tt} + u \ge 0, \text{ en } D,$$
$$u(x,0) \le M < 0,\ u_t(x,0) \le 0, \text{ en } [x_0 - t_0, x_0 + t_0].$$
Demuéstrese que $u(x_0,t_0) < 0$.

6. Calcular la única solución del problema de Cauchy
$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = x^2,\ t > 0,\ x \in \mathbb{R},$$
$$u(x,0) = x,\ u_t(x,0) = 0,\ x \in \mathbb{R},$$
donde $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

7. (**Examen de Caminos, 03/02/2006**) Encuéntrese la única solución del problema de Cauchy
$$u_{tt} - u_{xx} = \operatorname{sen}(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}\ , t > 0$$
$$u(x,0) = x^2\ \forall x \in \mathbb{R};\ \ u_t(x,0) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

8. (**Propuesto en el examen del 28/06/2006**) Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea
$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) &= f(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t > 0,\\ u(x,0) &= \alpha(x),\ x \in \mathbb{R},\\ u_t(x,0) &= \beta(x),\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{16}$$

   a) Sea $(x_0,t_0) \in \mathbb{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene
$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) &= \frac{1}{2}\,[v(x_0+t_0,0) \ + \ v(x_0-t_0,0)\ ] + \\ &+\frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+\frac{1}{2}\int_T (v_{tt} - v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{17}$$
   Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathbb{R})$, entonces $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T} (P\ dx + Q\ dt)$.

   b) Defínase con precisión el concepto de solución de (16) y usando la fórmula anterior, pruébese que (16) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (16).

   c) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (16).