CAPÍTULO I: INTRODUCCIÓN [1]

Aquí podrás encontrar los apartados siguientes: conocimientos previos necesarios para seguir adecuadamente este capítulo, resumen del mismo con la bibliografía recomendada y actividades complementarias. **Al final aparece una relación de ejercicios**.
En la página web

http://www.ugr.es/∼acanada/

encontrarás información adicional sobre la asignatura (exámenes de cursos anteriores, enlaces a páginas relacionadas, prácticas de ordenador, etc.)

CONOCIMIENTOS PREVIOS

1. Potencial gravitacional de distribuciones de masas discretas y continuas (no imprescindible).
2. Teorema fundamental del Cálculo y teorema de derivación de una integral paramétrica.
3. Integral de superficie. Teorema de la divergencia (no imprescindible).

Estos conocimientos se pueden consultar, por ejemplo, en las referencias siguientes (es posible que el alumno pueda usar otras que ya conoce):

1. T.M. Apostol. Análisis Matemático. Reverté, Barcelona, 1960.
2. M. Braun. Differential Equations and Their Applications. Springer-Verlag, New York, 1.983.
3. C.C. Lin y L.A. Segel. Mathematics Applied to Deterministic Problems in the Natural Sciencies. SIAM, Philadelphia, 1988.
4. I. Peral : Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales.
5. Addison-Wesley, Wilmington, 1995. http://mathworld.wolfram.com/

[1] A. Cañada, Febrero 2007, EDPMAT

RESUMEN DEL CAPÍTULO

El objetivo básico de este capítulo es que el alumno conozca el origen de las EDP, tanto en su relación con otras disciplinas matemáticas como en el importante papel que juegan en las aplicaciones a diversas materias, como Física, Biología, Ingeniería, etc.
Comenzamos con problemas relacionados con el potencial gravitacional.
El potencial gravitacional $V(x)$ originado en el punto $x \in \mathbb{R}^3$ por una masa m localizada en un punto $\xi \in \mathbb{R}^3$ viene dado por

$$V(x) = -G\ \frac{m}{\|x-\xi\|}$$

donde G es la constante de gravitacional universal y $\|\cdot\|$ denota la norma euclídea. La fuerza gravitacional $g(x)$ viene dada por $g(x) = -\nabla V(x)$, donde ∇V indica el gradiente de la función V. Como sabemos,

$$\nabla V(x) = \left(\frac{\partial V(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_2}, \frac{\partial V(x)}{\partial x_3}\right)$$

En este caso

$$g_i(x) = -\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = -Gm\frac{x_i - \xi_i}{\|x-\xi\|^3}$$

Trivialmente se comprueba que el potencial es una función armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\}$, esto es, que verifica la **ecuación de Laplace**

$$\Delta V(x) = 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\xi\} \tag{1}$$

Aquí, ΔV es el laplaciano de la función V. Como sabemos

$$\Delta V(x) = \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x_3^2}$$

La llamada ecuación de Laplace aparece en la obra de Laplace (1749-1827) titulada Mécanique Céleste en 1799, aunque era conocida con anterioridad.
El potencial gravitacional $V(x)$ debido a un número finito de masas $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ...\xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define de manera análoga como

$$V(x) = -G\sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x-\xi_i\|}$$

Trivialmente V es armónica en $R^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.
Lo anterior se refiere a distribuciones discretas y finitas de masas. Un salto cualitativo importante se da cuando se trata de definir el potencial gravitacional de una distribución continua de masa que se encuentra situada en el espacio euclídeo

tridimensional. Aquí la suma finita se transforma en una suma continua, dando lugar a una integral en el correspondiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$. Más concretamente si tenemos un cuerpo (subconjunto abierto y acotado) de $\mathbb{R}^3$ con una distribución de masa dada por la función de densidad $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, el potencial gravitacional se define como

$$V(x) = -G \int_{\Omega} \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|}\, d\xi \tag{2}$$

La integral anterior tiene un integrando con denominador cero si $x = \xi$. Así pues la existencia de $V(x)$ no es trivial si $x \in \overline{\Omega}$. Bajo condiciones muy amplias (ρ medible y acotada) se demostrará en el capítulo III que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y que

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x_i} = -\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{G\rho(\xi)}{\|x - \xi\|}\, d\xi$$

Sin embargo, se mencionarán también ejemplos en este capítulo que ponen de manifiesto que, aunque ρ sea continua, V no tiene que ser necesariamente de clase $C^2(\Omega)$. Trivialmente $V \in C^{\infty}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y

$$\Delta V(x) = 0, \ \forall \ x \notin \overline{\Omega} \tag{3}$$

Demostraremos en el capítulo III que si $\rho \in C^1(\Omega)$ y además es acotada, entonces $V \in C^2(\Omega)$ y

$$\Delta V(x) = 4\pi G \rho(x), \ \forall \ x \in \Omega \tag{4}$$

Esta es la conocida **ecuación de Poisson**(1781-1840). Si esta ecuación se plantea en dimensión uno, es decir,

$$V''(x) = c\rho(x), \ c \in \mathbb{R},$$

el conjunto de las soluciones se obtiene de manera inmediata integrando dos veces. Como veremos en el capítulo II, la situación se complica significativamente para dimensiones mayores o iguales que 2.
Como curiosidad, puede demostrarse fácilmente que

$$\Delta_x \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} = 0, \ \forall x \neq \xi$$

con lo que, para obtener las derivadas de segundo orden de V en Ω, no puede intercambiarse la derivación con la integración en la fórmula (2). *Esto le suele llamar la atención a los alumnos. No porque crean que siempre se pueden intercambiar ambas operaciones (ya nos encargamos los matemáticos de ponerles suficientes ejemplos patológicos al respecto) sino porque este es un ejemplo muy natural surgido de la Física donde se pone de manifiesto que el rigor matemático es crucial si se quieren hacer las cosas bien.*

Las disquisiciones anteriores motivan el estudio de la existencia de soluciones radiales no triviales de la ecuación de Laplace $n-$ dimensional (1): soluciones de la forma $V(x) = v(\|x - \xi\|)$. En este caso se comprueba fácilmente que v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0 \tag{5}$$

donde $r = \|x - \xi\|$. Es fácil demostrar que una base de las soluciones de (5) está formada por las funciones $\{1, \ln r\}$ si $n = 2$ y $\{1, r^{2-n}\}$ si $n \geq 3$. Se llega así de manera natural al concepto de solución fundamental de la ecuación de Laplace (salvo constantes) en $\mathbb{R}^n$

$$E(x,\xi) = \begin{cases} \ln \|x - \xi\|, \text{ si } n = 2, \\ \\ \frac{1}{2-n}\|x - \xi\|^{2-n}, \text{ si } n > 2. \end{cases} \tag{6}$$

Como su nombre indica, desempeñará un papel importante en el estudio de ecuaciones elípticas en el capítulo III.

Nos ocupamos a continuación de la **ecuación de la difusión**. La deduciremos para una situación en dinámica de poblaciones, comenzando con el caso unidimensional. Para ello, sea una población formada por una especie que se desplaza en el espacio euclídeo unidimensional. Representemos por $u(x,t)$ la densidad de población de la especie dada, en el punto de abscisa x y en el tiempo t. Supongamos que la población se mueve dentro de un intervalo, para x entre dos valores dados a y b. Teniendo en cuenta el concepto de integral definida, la población total en el tiempo t para x variando entre a y b, vendrá dada por una expresión (salvo constantes positivas) de la forma $\displaystyle\int_a^b u(x,t)\, dx$. Asumamos, además, que hay un desplazamiento de la población en la dirección positiva de la recta real (por $x = a$ entran individuos y por $x = b$ salen), y que este desplazamiento viene dado por una función $\phi(x,t)$, que representa el flujo de la población u.

La derivación de la llamada **ecuación de la difusión**, para el caso que nos ocupa (dinámica de poblaciones), se basa en la aplicación de dos tipos de leyes fundamentales:

- Una ley de conservación, aplicada al índice (o tasa) de crecimiento de la población.
- Una ley que relaciona el flujo de población desde las partes con más densidad de la misma a las de menos, con la tasa de variación de la citada población respecto de la variable espacial. Aquí usaremos la ley de A. Fick, fisiólogo, que puede considerarse como el fundador de la teoría clásica de la difusión, hace más de cien años.

La ley de conservación que puede aplicarse en este caso, es la siguiente: para cualquier intervalo $[a, b]$, el índice de crecimiento de la población respecto del tiempo t, vendrá dado por el flujo de población en la sección a menos el flujo de población en la sección b, o lo que es lo mismo, el flujo total de la población a través de la frontera del intervalo (a, b). Esto se puede escribir como

$$\frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \phi(a,t) - \phi(b,t) \tag{7}$$

Si las funciones u y ϕ son suficientemente regulares (no debe preocuparnos este aspecto en la deducción de la ecuación) entonces:

$$a)\ \frac{d}{dt}\int_a^b u(x,t)\ dx = \int_a^b u_t(x,t)\ dx$$

$$b)\ \phi(a,t) - \phi(b,t) = -\int_a^b \phi_x(x,t)\ dx$$

donde los subíndices indican las derivadas parciales respecto de la correspondiente variable.
En suma, tenemos que

$$\int_a^b \left[u_t(x,t) + \phi_x(x,t)\right]\ dx = 0$$

para cualquier intervalo $[a, b]$. Por tanto, se debe tener

$$u_t(x,t) + \phi_x(x,t) = 0, \forall\ x \in \mathbb{R},\ \forall\ t > 0 \tag{8}$$

Esto es una ley de conservación expresada por una ecuación en derivadas parciales de primer orden.
En la expresión anterior aparecen dos funciones, u y ϕ, y una sola ecuación. La experiencia sugiere que ambas deben estar relacionadas. En nuestro caso, si se observan empíricamente los movimientos de las poblaciones, generalmente sucede que los individuos se mueven desde las partes de densidad alta a las de densidad baja de una forma proporcional al gradiente de la población (respecto de la variable espacial), y con signo opuesto al de éste. En efecto, si $u_x(x_0, t_0) > 0$, esto significa que, fijado el tiempo t_0, la función u, como función de la variable x es creciente en un entorno del punto x_0. Por tanto, hay más densidad de población a la derecha de x_0 que a la izquierda y, lógicamente, el desplazamiento de los individuos se produce hacia la izquierda de x_0. Así podemos asumir que

$$\phi(x,t) = -Du_x(x,t) \tag{9}$$

que es la mencionada Ley de Fick (D es una constante positiva, llamada constante de difusión, que depende de la situación particular que estemos tratando).
Combinando (8) con (9) se obtiene

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = 0, \tag{10}$$

que es el modelo clásico para el estudio de una población cuando se admite difusión unidimensional. A esta ecuación se le llama habitualmente en Física **ecuación del calor**, puesto que modela muchos tipos de fenómenos relacionados con la distribución y evolución de la temperatura en los cuerpos, y en general fenómenos con difusión. Es además el representante típico de las ecuaciones de tipo parabólico.
En la deducción del modelo anterior no se ha tenido en cuenta la influencia que en la evolución de la población pueden tener otros parámetros, tales como el índice de natalidad o mortalidad de la especie, condiciones ambientales externas (por ejemplo condiciones climáticas, que influyan en el crecimiento de la población), etc. En general, esto se expresa por una función $f(x,t,u)$, de tal manera que una ecuación más general que (10) es

$$u_t(x,t) - Du_{xx}(x,t) = f(x,t,u) \tag{11}$$

que se conoce con el nombre de **ecuación del tipo reacción-difusión**, de gran importancia no sólo en Biología sino también en Física, Química y otras Ciencias.
Vamos a intentar ahora trasladar las ideas anteriores al caso n-dimensional. Esto no es tarea fácil, como sabemos muy bien aquellos que nos dedicamos a la enseñanza del análisis matemático. El análisis de funciones de varias variables reales difiere sensiblemente, tanto en las ideas, como en los resultados, del análisis de funciones de una variable real. Baste citar, por ejemplo, el concepto de derivabilidad de una función en un punto o los resultados relacionados con los teoremas integrales del análisis vectorial (Barrow, Green, Stokes, etc.).
En primer lugar, la función de densidad de la población es ahora una función de $n+1$ variables: n variables para el espacio y una para el tiempo. Así, en general tenemos $u(x,t)$ para dicha función de densidad, con $x \in \mathbb{R}^n$ y $t \in \mathbb{R}$. Sea Ω una región acotada de $\mathbb{R}^n$. En este caso, la ley de conservación (7) se expresa como

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega u(x,t)\ dx = -\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds, \tag{12}$$

donde $\partial\Omega$ significa la frontera topológica de Ω, $\displaystyle\int_\Omega u(x,t)\ dx$ representa la integral múltiple correspondiente, $\displaystyle\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds$ es una integral de superficie, que expresa el flujo de población a través de la frontera de Ω y $n(s)$ es el vector normal exterior a la superficie (o hipersuperficie) $\partial\Omega$ en el punto s. En el caso unidimensional, la frontera topológica de $\Omega = (a,b)$ está formada por el conjunto $\{a,b\}$. En $s=a$ la normal exterior es el vector unidimensional -1 y en $s=b$, la normal exterior es el vector unidimensional 1.
Como anteriormente, la ecuación integral (12) puede escribirse, si las funciones que aparecen en ella son regulares, como una ecuación en derivadas parciales. Para ello, lo primero que debemos hacer es escribir la integral de superficie que aparece en la relación anterior, como una integral múltiple. Esto se puede hacer, cuando el

dominio Ω considerado es también bueno, usando el Teorema de la Divergencia, resultado fundamental del análisis vectorial, del cual se deduce la expresión

$$\int_{\partial\Omega} < \phi(s,t), n(s) > \ ds = \int_{\Omega} div_x \ \phi(x,t) \ dx$$

donde si el flujo $\phi(x,t) = (\phi_i(x,t)), 1 \leq i \leq n$, la divergencia de ϕ, respecto de la variable x, se define como

$$div_x \ \phi(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi_i(x,t)}{\partial x_i}$$

Aplicando este teorema y usando las mismas ideas que para el caso unidimensional, llegamos a la ecuación

$$u_t(x,t) + div_x \ \phi(x,t) = 0, \ \forall \ x \in \mathbb{R}^n, \ \forall \ t > 0, \tag{13}$$

que es la versión general de (8).
Por último, la ley de Fick multidimensional, afirmaría ahora que el vector flujo $\phi(x,t)$ es directamente proporcional (en sentido negativo) al gradiente de la población respecto de la variable espacial; es decir,

$$\phi(x,t) = -D \ \nabla_x u(x,t),$$

donde $\nabla_x u(x,t)$, es el vector gradiente de u, respecto de la variable espacial x. Así obtendríamos

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = 0, \tag{14}$$

donde Δ_x, el operador Laplaciano respecto de x, viene dado por

$$\Delta_x u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}$$

A la ecuación anterior se le conoce con el nombre de **ecuación de la difusión o ecuación del calor** n-dimensional. Nuevamente, admitiendo otros factores de influencia de crecimiento en la población, como la tasa de natalidad, mortalidad, etc., obtendríamos la ecuación

$$u_t(x,t) - D\Delta_x u(x,t) = f(x,t,u) \tag{15}$$

Otro problema que está en el origen de las EDP, y que dió lugar al estudio de la llamada **ecuación de ondas**, es el problema de la cuerda vibrante. Puede describirse de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x,t)$, donde $u(x,t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t ($t \geq 0$). El problema que se plantea es obtener $u(x,t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue Jean Le Rond d'Alembert. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean pequeñas), D'Alembert demostró en 1747 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219) que la función u debe satisfacer las condiciones:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && 0 < x < \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0
\end{aligned} \tag{16}$$

La primera condición en (16) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas.** La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que primero se tira de la cuerda y a continuación se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

D'Alembert demostró también que la solución de (16) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{17}$$

donde $\tilde{f}$ es una extensión conveniente de la función f.

La fórmula (17) fue también demostrada por Euler (Mora Acta Erud., 1749, 512-527), quien difería fundamentalmente de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de función.
Otra manera de obtener la solución del problema (16) completamente distinta de la vista anteriormente fue propuesta por Daniel Bernouilli en 1753 (Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195). La idea clave es obtener la solución de (16)

como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma

$$u_n(x,t) = sen(nx)\cos(nt), \ \forall \ n \in \mathbb{N}, \tag{18}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $sen(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0,\pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (18).

D. Bernouilli afirmó que la solución de (16) se representa de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\cos(nt), \tag{19}$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (16). Si la solución propuesta por Bernouilli es correcta, ello obligaría a que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx), \ \forall \ x \in [0,\pi], \tag{20}$$

para una adecuada elección de los coeficientes a_n. Las ideas expuestas por Bernouilli en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de D'Alembert y Euler quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (20) (D'Alembert) ni menos aún cualquier función (Euler). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de D'Alembert titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*".

Hubo que esperar 54 años hasta que las ideas de D. Bernouilli fueron tomadas en cuenta por Jean Baptiste-Joseph Fourier, matemático y físico francés. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre el tema de la propagación del calor. Más concretamente, Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π, cuyos extremos se mantienen a $0°$ centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?

Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas, demostró que si

$u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t, entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \le x \le \pi.
\end{aligned} \tag{21}$$

La primera condición en (21) es una Ecuación en Derivadas Parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación del calor**. La segunda significa que la temperatura, en los extremos de la varilla, se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de Bernouilli, para la ecuación de ondas, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan formalmente dicha ecuación, obtenemos, como en el caso de la ecuación de ondas, los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{22}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0,\ 0 < t < T. \tag{23}$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Como antes, (22) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (22) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $sen(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (23) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2 t)$.
Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas soluciones elementales de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{24}$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura f, es algún múltiplo de $sen(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (21) es un múltiplo adecuado de v_n. Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró Fourier, como Bernouilli, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución u de (21), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (21) sea de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t) sen(nx). \tag{25}$$

Fourier afirmó en su artículo que esto era así. Las ideas expuestas por Fourier en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes que han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas.

Antes de terminar el resumen de este capítulo, hemos de decir que los ejemplos detallados que hemos presentado con anterioridad, surgieron en los siglos XVIII y XIX. No obstante, siguen representando un papel fundamental en la teoría moderna de EDP y en torno a ellos, o a variaciones de ellos, existen numerosos interrogantes que se comentarán en el curso. La teoría moderna de EDP surgió a finales del siglo XIX y principios del XX con contribuciones importantes de Poincaré y Hilbert, alcanzando un grado notable de contenido con el desarrollo en la primera mitad del siglo XX del análisis funcional (lineal). Desde mediados de los años cincuenta del siglo pasado el uso de funciones generalizadas, distribuciones, espacios de Sobolev, etc. y de la teoría de espacios de Hilbert, ha permitido avances muy importantes. Por último, diremos que en la actualidad y debido a las aplicaciones, hay un interés especial por el estudio de EDP no lineales así como por el establecimiento de métodos numéricos de aproximación a las soluciones de las mismas. Esto es otro mundo, con contenidos más propios de programas de Doctorado.

La **bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo** es la siguiente:

1. A. Cañada, Series de Fourier y Aplicaciones. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.

2. M. Kline, Mathematical thought from ancient to modern times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducción al castellano en Alianza Editorial, Madrid, 1992.

3. I. Peral, Primer curso de Ecuaciones en derivadas parciales. Addison-Wesley, Wilmington, 1995.

4. A.N.Tijonov y A.A. Samarsky, Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.

ACTIVIDADES COMPLEMENTARIAS

Es muy recomendable que el alumno complete la información histórica que se proporciona en el capítulo con las referencias siguientes:

1. H. Brezis. Partial Differential Equations in the 20th Century. Advances in Mathematics, 135, 76-144, 1998. Notas históricas sobre las EDP del siglo XX. De nivel alto. No obstante viene muy bien para que el alumno comprenda el alcance de las EDP y su papel en la matemática actual.

2. A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Pirámide, Madrid, 2002. En la introducción de este libro se pueden consultar algunos hechos relevantes de los métodos de Fourier y su relación con las EDP.

3. M. Kline. Mathematical Thought from Ancient to Modern Times. Oxford University Press, New York, 1972. Traducido al castellano: Alianza Editorial, Madrid, 1992. Muy recomendable para la historia de las EDP en los siglos XVIII y XIX.

4. Para consultas históricas de cualquier tipo:
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/ history/index.html

EJERCICIOS

1. Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{26}$$

y sea $\xi \in \mathbb{R}^n$ dado. Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (26) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall\, r \in (0, +\infty). \tag{27}$$

Recíprocamente, si v verifica (27) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (26) en $\mathbb{R}^n \setminus \{\xi\}$. Encuéntrese el conjunto de todas las soluciones de (27).

2. (a) El potencial gravitacional $V(x)$ originado por un número finito de masas puntuales $m_1, ..., m_k$ localizadas en los puntos $\xi_1, ..., \xi_k$ de $\mathbb{R}^3$ se define como

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} \frac{m_i}{\|x - \xi_i\|}$$

donde G es la constante de gravitación universal. Demuéstrese que V es armónica en $\mathbb{R}^3 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

(b) Demuéstrese que el resultado anterior no es cierto si $\mathbb{R}^3$ se sustituye por $\mathbb{R}^2$.En cambio, muéstrese que si $\xi_1, ..., \xi_k$ son puntos distintos de $\mathbb{R}^2$, la función

$$V(x) = -G \sum_{i=1}^{i=k} m_i \ln(\|x - \xi_i\|)$$

es armónica en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\xi_1, ..., \xi_k\}$.

(c) Demuéstrese que el resultado del primer apartado es cierto para $\mathbb{R}^n$, $n \geq 4$, si $\|x - \xi_i\|$ se sustituye por $\|x - \xi_i\|^{n-2}$

3. Demuéstrese que el volumen de la bola unidad en $\mathbb{R}^n$, v_n, viene dado por

$$v_n = \begin{cases} \dfrac{\pi^{n/2}}{(n/2)!}, & \text{si } n \text{ es par,} \\[2ex] \dfrac{2^{(n+1)/2}\pi^{(n-1)/2}}{1 \cdot 3 \cdot ...n}, & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Compruébese que $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$.

4. Calcular el área de la esfera unidad en $\mathbb{R}^n$ y el área de cualquier esfera de radio $r > 0$ en $\mathbb{R}^n$.

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto y acotado y $x \in \Omega$. Estúdiese los valores de β para los que existe la integral

$$\int_\Omega \frac{1}{\|x - \xi\|^\beta} \, d\xi. \tag{28}$$

6. Sea $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$, una función medible y acotada, donde $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es abierto y acotado. Demuéstrese que el potencial gravitacional

$$V(x) = -G \int_\Omega \frac{\rho(\xi)}{\|x - \xi\|} \, d\xi \tag{29}$$

está bien definido para cualquier $x \in \mathbb{R}^3$. Pruébese que $V \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ y que $\Delta V(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

7. Sea Ω un abierto no vacío de $\mathbb{R}^n$. Estúdiese la dimensión del espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega$. Pruébese un resultado análogo para la ecuación del calor y para la ecuación de ondas.

8. El núcleo (o solución fundamental) de la ecuación del calor se define como

$$K(x, \xi, t) = (4\pi t)^{-1/2} e^{-(x-\xi)^2/4t}.$$

en dimensión uno y como

$$K(x,\xi,t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{\,-\|x-\xi\|^2/4t},$$

para dimensión n arbitraria. Pruébese que el núcleo es solución de la ecuación del calor cuando $t > 0$, es decir que se verifica

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \Delta_x\right) K(x,\xi,t) = 0, \ \forall \ t > 0.$$

9. Considérese la ecuación de ondas unidimensional $u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \ (x,t) \in \mathbb{R}^2$. Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x+t, \ \mu = x-t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0, \ (\xi,\mu) \in \mathbb{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de la citada ecuación de ondas.

10. (**Examen del 25/06/05.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden

$$u_{xy}(x,y) + a \ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \qquad (30)$$

donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

(a) Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (30).

(b) Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (30) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.