ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 28/06/2006.

1. (**Valor total del ejercicio 4 puntos**) Considérese el problema de Cauchy para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x,t),\ x \in \mathrm{R},\ t > 0, \\ u(x,0) = \alpha(x),\ x \in \mathrm{R}, \\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathrm{R}. \end{aligned} \tag{1}$$

   (a) (**2 puntos**) Sea $(x_0, t_0) \in \mathrm{R}^2$, tal que $t_0 > 0$ y T su triángulo característico. Pruébese que si v es cualquier función real perteneciente a $C^2(\overline{T})$, se tiene

$$\begin{aligned} v(x_0,t_0) \ &= \frac{1}{2}\left[v(x_0+t_0,0) \ + \ v(x_0-t_0,0)\ \right] + \\ &+ \frac{1}{2}\int_{x_0-t_0}^{x_0+t_0} v_t(s,0)\ ds + \\ &+ \frac{1}{2}\int_T (v_{tt} - v_{xx})(\xi,\tau)\ d\xi d\tau. \end{aligned} \tag{2}$$

   Sugerencia: la fórmula de Green en el plano nos dice que si $P, Q \in C^1(\overline{T}, \mathrm{R})$, entonces $\int_T (Q_x(x,t) - P_t(x,t))\ dx\ dt = \int_{\partial T}(P\ dx + Q\ dt)$.

   (b) (**0.5 puntos**) Defínase con precisión el concepto de solución de (1) y usando la fórmula anterior, pruébese que (1) puede tener, a lo sumo, una solución. Propóngase, además, la fórmula que puede proporcionar la única solución de (1).

   (c) (**1.5 puntos**) Impónganse hipótesis apropiadas a las funciones f, α y β y demuéstrese que la fórmula propuesta en el apartado anterior define la única solución de (1).

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tanto para bolas como para esferas.

   (b) (**1.5 puntos**) Usando la propiedad anterior, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

   (c) (**1 punto**) Considésere el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \quad u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

   donde Ω es un dominio acotado de R^n. Supongamos la hipótesis siguiente:
   (H): la única solución de (3) se puede calcular explícitamente siempre que la función f es un polinomio.
   Sea ahora la función $f_0 : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, definida como $f_0(x) = e^{x_1},\ \forall\ x \in \mathrm{R}^n$ y u_{f_0} la única solución de (3) con dato frontera f_0. Usando la hipótesis **(H)** y el principio del máximo-mínimo, demuéstrese que existe una sucesión de funciones $\{u_n\}$, que se puede calcular explícitamente, tal que $\{u_n\} \to u_{f_0}$ uniformemente en $\overline{\Omega}$.

3. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enúnciese con precisión el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

   (b) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{4}$$

   Si $f \equiv 0$, la única solución de (4) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \mathrm{sen}(2x)$, la única solución de (4) es $u(x,t) = \mathrm{sen}(2x)e^{-4t}$.
   Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \mathrm{sen}(2x), \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

   i. (**1 punto**) ¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \mathrm{sen}(2x)e^{-4t}, \text{ si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

   solución de (4)? Si la respuesta es negativa, razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (4) no se cumplen.

   ii. (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución de (4).