ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 26/04/2005.

1. (**Valor total del ejercicio 2 puntos.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden
$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$
donde a es una constante real.
   (a) (**0.5 puntos)** Demuéstrese que el conjunto de soluciones ($u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$) de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.
   (b) (**1.5 puntos)** Encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).

2. (Valor total del ejercicio **4 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea
$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & f(x,t), & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) & = & 0, & 0 \le x \le \pi, \end{array}\right. \tag{ONH}$$
donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.
   (a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.
   (b) (**2.5 puntos**) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función
$$u(x,t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$
es la única solución de (ONH).

3. (**Valor total del ejercicio 4 puntos.**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, \quad 0 < t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (**1 punto**) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(b) (**1 punto**) Aplíquese el método de separación de variables para encontrar soluciones elementales de (C2).

(c) (**2 puntos**) Usando el apartado anterior, propóngase una fórmula que proporcione la única solución de (C2), dando condiciones suficientes sobre f que permitan probar, rigurosamente, que la fórmula propuesta es válida.