ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 25/06/2005. **Primera parte**

1. (**Valor total del ejercicio 1.5 puntos.**) Considérese la e.d.p. lineal de segundo orden
$$u_{xy}(x,y) + a\ u_x(x,y) + bu_y(x,y) + abu(x,y) = 0,\ (x,y) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$
donde a y b son constantes reales y $u \in C^2(\mathrm{R}^2, \mathrm{R})$.
   (a) (**1 punto)** Mediante el cambio de variable $u(x,y) = v(x,y)e^{-ay-bx}$, encuéntrese una fórmula que proporcione todas las soluciones de (1).
   (b) (**0.5 puntos)** Demuéstrese que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

2. (Valor total del ejercicio **3.5 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea
$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi, \end{aligned}\right\} \quad (ONH)$$
donde f y f_x son continuas en $[0,\pi] \times [0,\infty)$ y $f(0,t) = f(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$.
   (a) (**1 punto**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.
   (b) (**2.5 puntos**) Si $F(x,t)$ es la extensión impar y $2\pi-$ periódica de f, respecto de x, pruébese que la función
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t \int_{x-t+\tau}^{x+t-\tau} F(\psi,\tau)\ d\psi\ d\tau$$
es la única solución de (ONH).