Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Granada

Ecuaciones en Derivadas Parciales

Licenciatura en Matemáticas. Cuarto curso, 22/09/2005, Primera parte

1. **(2 puntos)** Pruébese que la ecuación

$$\Delta u(x, y, z) = 0 \tag{1}$$

se transforma en

$$\frac{1}{\rho}\,\frac{\partial(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\,\frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\, s^2} = 0, \tag{2}$$

mediante el cambio a coordenadas cilíndricas $x = \rho \cos\phi,\ y = \rho\ \mathrm{sen}\phi,\ z = s.$

2. (**Valor total del ejercicio 3 puntos**) Se considera el problema de tipo mixto para la ecuación de ondas no homogénea

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= f(x,t), \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ u(x,0) = h(x),\ u_t(x,0) &= g(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{ONH}$$

donde f es continua en $[0,\pi] \times [0,\infty)$, $h \in C^2[0,\pi]$, $g \in C^1[0,\pi]$.

   (a) (**1 punto**) Demuéstrese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,\infty))$.

   (b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución del problema

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\ 0 \le x \le \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) = \mathrm{sen} x, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \mathrm{sen}^2 x,\ 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \ge 0, \end{gathered} \tag{3}$$