ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 20/09/2006.

1. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \ 0 \le x \le \pi, \ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ 0 \le t, \\ &u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = g(x), \ 0 \le x \le \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

   (a) **(0.5 puntos)** Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.

   (b) **(1.5 puntos)** Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución (sugerencia: método de la energía).

   (c) **(0.5 puntos)** Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{p} b_n \cos(nx),$$

   siendo $a_n, \ 0 \le n \le m, \ b_n, \ 0 \le n \le p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

   (d) **(1 punto)** Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

   (a) (**1.5 puntos**) Usando la propiedad del valor medio para funciones armónicas, enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para esta clase de funciones.

   (b) **(2 puntos)** Aplíquese el método de separación de variables para resolver el problema de contorno

$$\begin{gathered} u_{xx} + u_{yy} = 0, \ 0 < x < 1, \ 0 < y < \pi, \\ u_y(x,0) = 0, \ u_y(x,\pi) = 0, \ u(0,y) = \cos y, \ u(1,y) = \mathrm{sen}^2 y. \end{gathered}$$

3. **(Valor total del ejercicio 3 puntos)**

(a) (**1.5 puntos**) Enunciado y demostración del principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

(b) (**1.5 puntos**) Cálculese la única solución del problema

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}; \quad 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T$$

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0; \quad 0 < t \leq T$$

$$u(x,0) = \mathrm{sen}^3(x); \quad 0 \leq x \leq \pi$$

(Sugerencia: demuéstrese previamente que $\mathrm{sen}^3(x) = \frac{3}{4}\mathrm{sen}(x) - \frac{1}{4}\mathrm{sen}(3x)$, $\forall x \in \mathrm{R}$).