ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 18/06/2004.

1. (**Valor total del ejercicio 4 puntos.**) Considérese la ecuación de Laplace

$$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

y sea $\xi \in \mathrm{R}^n$ dado.

(a) (**1 punto**) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x - \xi\|)$, con $v : (0, +\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0, +\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0,\ \forall\, r \in (0, +\infty) \tag{2}$$

Recíprocamente, si $v \in C^2(0, +\infty)$ verifica (2) entonces $u(x) = v(\|x - \xi\|)$ verifica (1) en $\mathrm{R}^n \setminus \{\xi\}$.

(b) (**0.5 puntos**) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, encontrar una fórmula que proporcione todas las soluciones de (2).

(c) (**0.5 puntos**) Escríbase la solución fundamental, $\Phi(x, s)$, para (1). Enunciado de la primera y segunda fórmulas de Green.

(d) (**1 punto**) Enunciado de la fórmula fundamental integral de Green. Demostración detallada de la misma para el caso $n = 2$.

(e) (**1 punto**) Considérese el problema de Dirichlet

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega \equiv B_{\mathrm{R}^n}(0; 1),\quad u(x) = f(x),\ x \in \partial\Omega \tag{3}$$

Demuéstrese que si $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ es un polinomio, entonces la única solución de (3) es un polinomio del mismo grado que f.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos)** Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{$C2$}$$

donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

(a) (**0.5 puntos**) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(\pi)^{-1/2}, (2/\pi)^{1/2} \cos\ n(.),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

(b) (**1 punto**) Defínase con precisión el concepto de solución de (C2) y demuéstrese que (C2) puede tener, a lo sumo, una solución. Sugerencia: Considérese la función energía

$$I(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\ dx + \int_0^t \int_0^\pi (u_x(x,s))^2\ dx\ ds$$

(c) (**2 puntos**) Pruébese que si $f \in C^1[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)\exp(-n^2 t), & \text{si } t > 0, \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\ dx,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. (**Valor total del ejercicio 2.5 puntos**) Considérese la ecuación casilineal de orden uno, en dos variables independientes

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u) \tag{4}$$

donde a, b, c son funciones de clase C^1 en un dominio Ω de R^3.

(a) (**1 punto**) Formúlese con precisión el concepto de problema de Cauchy para (4), así como el concepto de solución del mismo. Enúnciese un teorema de existencia y unicidad de soluciones del citado problema de Cauchy.

(b) (**1.5 puntos**) Calcúlese la única solución del problema de Cauchy

$$xu_x + yuu_y = -xy,\ xy = 1, u = 5,\ x \in [a, b],\ a > 0 \tag{5}$$

Sugerencia: Si $(x(t, s), y(t, s), u(t, s))$ es la única solución del sistema característico asociado a (5), demuéstrese que para cualquier $s \in [a, b]$ fijo se tiene $(x(t, s)y(t, s))_t + (u(t, s) + \frac{1}{2}u^2(t, s))_t = 0$.