ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 16/09/2004.

1. (**Valor total del ejercicio 3 puntos.**)

   (a) (**0.5 puntos**) Enunciado de la propiedad del valor medio para funciones armónicas, tanto en el caso de bolas como de esferas. ¿Caracteriza esta propiedad a las funciones armónicas? Razónese la respuesta.

   (b) (**0.5 puntos**) Enunciado del principio del máximo-mínimo para funciones armónicas.

   (c) (**2 puntos**) Usando los dos apartados anteriores, demuéstrese rigurosamente el llamado Teorema de Harnack (para funciones armónicas):
   Sea Ω un dominio acotado de R^n y $\{u_n\}$ una sucesión de funciones reales, cada una de las cuales es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$. Si la sucesión $\{u_n\}$ es uniformemente convergente en $\partial\Omega$, entonces $\{u_n\}$ converge uniformemente en $\overline{\Omega}$ a una función u, que es armónica en Ω y continua en $\overline{\Omega}$.

2. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto para la ecuación del calor

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, 0 \leq x \leq \pi, \ 0 < t \leq T, \\ &u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ 0 < t \leq T, \\ &u(x,0) = f(x), \ 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{1}$$

   donde $T > 0$ y $f \in C[0,\pi]$ son dados.

   (a) (**1 punto**) Para cada función $h \in L^2(0,\pi)$, escríbase el desarrollo en serie de Fourier de h respecto de la base $\{(2/\pi)^{1/2}\mathrm{sen}\ n(\cdot),\ n \in \mathbb{N}\}$. Dar condiciones suficientes sobre la función h que permitan asegurar que si $h_n,\ n \in \mathbb{N}$ son los coeficientes de Fourier de h respecto de esta base, entonces la serie $\sum |h_n|$ es convergente.

(b) (**0.5 puntos**) Defínase con precisión el concepto de solución de (1). Enúnciese el principio del máximo mínimo para la ecuación del calor. Usando este principio, demuéstrese que (1) puede tener, a lo sumo, una solución.

(c) (**2 puntos**) Pruébese que si $f \in C^1[0, \pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (1) viene dada por la fórmula:

$$u(x,t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx) \exp(-n^2 t), & \text{si } t > 0, \\ f(x), & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \text{sen}(nx)\ dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

3. (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos.**)

(a) (**1.5 puntos**) Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t), \ (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{2}$$

Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t, \ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi, \mu) = 0, \ (\xi, \mu) \in \mathrm{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (2). ¿Es dicho conjunto un espacio vectorial real de dimensión finita?

(b) (**2 puntos**) Considérese el problema $u_{xt}(x,t) = f(x,t), \ u(x,0) = \alpha(x), \ u_t(x,0) = \beta(x), \ (x,t) \in \mathrm{R}^2$, con f continua en R^2, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ si y solamente si se verifica la relación $\beta'(x) = f(x,0), \ \forall\ x \in \mathrm{R}$ y que, en este caso, la solución no es única.