ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 15/06/2007

(1) (**valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

(a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese, usando el método de la energía, que el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} + h(x,t), \quad 0 \le x \le \pi, \ t \ge 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi, \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = g(x), 0 \le x \le \pi \end{aligned}$$

$$u(0,t) = n(t), \qquad u(\pi,t) = m(t), \qquad t \ge 0.$$

tiene, a lo sumo, una solución $u \in C^2([0,\pi] \times [0,+\infty))$.

(b) (**2 puntos**) Calcúlese la única solución de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \cos x + \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= \operatorname{sen} x, & 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, & 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{aligned}$$

(2) (**valor total del ejercicio 3.5 puntos**) Considérese la ecuación de Laplace n-dimensional

$$\Delta u(x) = 0 \tag{1}$$

(a) (**1.5 puntos**) Demuéstrese que si $u \in C^2(\mathrm{R}^n \setminus \{0\})$ es solución de (1) de la forma $u(x) = v(\|x\|)$, con $v : (0,+\infty) \to \mathrm{R}$ una función de clase $C^2(0,+\infty)$, entonces v verifica la e.d.o.

$$v''(r) + \frac{n-1}{r}\, v'(r) = 0, \ \forall \, r \in (0,+\infty). \tag{2}$$

Recíprocamente, si v verifica (2) entonces $u(x) = v(\|x\|)$ verifica (1) en $\mathrm{R}^n \setminus \{0\}$.

(b) (**2 puntos**) Teniendo en cuenta esto, calcúlese la única solución del problema

$$\Delta u(x,y) = x^2 + y^2, \ 1 < x^2 + y^2 < 4,$$

$$u(x,y) = 1, \text{ si } \ x^2 + y^2 = 1; \qquad u(x,y) = 2, \text{ si } \ x^2 + y^2 = 4$$

(3) (**valor total del ejercicio 3 puntos**) Sea $f : [a, b] \to \mathrm{R}$ continua. Si $\delta > 0$ es fijo, considérese el problema de Cauchy

$$u_t = u_{xx},\ x \in \mathrm{R},\ t > 0,\ u(x, 0) = \varphi(x),\ x \in \mathrm{R},$$

donde $\varphi : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ es cualquier función continua tal que $\varphi(x) = 0$ si $x \leq a - \delta$, $\varphi(x) = f(x)$ si $a < x < b$ y $\varphi(x) = f(b)$ si $x \geq b + \delta$.

(a) (**0.5 puntos**) Escribir la fórmula que da la única solución acotada, $u(x, t)$ de este problema de Cauchy.

(b) (**0.5 puntos**) Pruébese que $\lim_{t \to 0^+} u(x, t) = f(x)$, uniformemente en $[a, b]$.

(c) (**2 puntos**) Utilícese el desarrollo en serie de potencias del núcleo de la ecuación del calor para probar que para cualquier número real positivo ε, existe algún polinomio p_ε tal que $|f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall\ x \in [a, b]$. (Teorema de Aproximación de Weierstrass).