ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 14/09/2007

(1) (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos.**)

(a) (**1.5 puntos**) Considérese la ecuación de ondas unidimensional

$$u_{xx}(x,t) = u_{tt}(x,t),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2 \tag{1}$$

Demuéstrese que si se realiza el cambio de variables independientes $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, la ecuación anterior se transforma en $u_{\xi\mu}(\xi,\mu) = 0,\ (\xi,\mu) \in \mathrm{R}^2$. Usando esto, calcular el conjunto de soluciones $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ de (1). Pruébese que dicho conjunto es un espacio vectorial real de dimensión infinita.

(b) (**2 puntos**) Considérese el problema $u_{xt}(x,t) = f(x,t),\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = \beta(x),\ (x,t) \in \mathrm{R}^2$, con f continua en R^2, $\alpha \in C^2(\mathrm{R})$, $\beta \in C^1(\mathrm{R})$. Demuéstrese que tiene solución $u \in C^2(\mathrm{R}^2)$ si y solamente si se verifica la relación $\beta'(x) = f(x,0),\ \forall\ x \in \mathrm{R}$ y que, en este caso, la solución no es única.

(2) (**Valor total del ejercicio 3.5 puntos**)

(a) (**2.5 puntos**) Enúnciese y demuéstrese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor $n-$dimensional.

(b) (**1 punto**) Calcular la única solución del problema de tipo mixto

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T,\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T,\\
u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0,\ \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \operatorname{sen}(4x),\ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

(3) (**Valor total del ejercicio 3 puntos.**) Usando la propiedad del valor medio, que caracteriza a las funciones armónicas, y el principio del máximo-mínimo, pruébese rigurosamente el llamado Teorema de Harnack:

Sea Ω *un dominio acotado de* R^n *y* $\{u_n\}$ *una sucesión de funciones reales, cada una de las cuales es armónica en* Ω *y continua en* $\overline{\Omega}$*. Si la sucesión* $\{u_n\}$ *es uniformemente convergente en* $\partial\Omega$*, entonces* $\{u_n\}$ *converge uniformemente en* $\overline{\Omega}$ *a una función* u*, que es armónica en* Ω *y continua en* $\overline{\Omega}$*.*