ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 2/05/2007.

(1) (**Valor del ejercicio: 2 puntos**) Sea Ω un abierto no vacío de R^n, $n \geq 2$. Demuéstrese rigurosamente que el espacio vectorial formado por todas las soluciones de la ecuación de Laplace $\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega$, tiene dimensión infinita.

(2) (**Valor total del ejercicio: 3.5 puntos**) Considérese el problema de tipo mixto

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0, \ 0 \leq x \leq \pi, \ 0 < t, \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0, \ 0 \leq t, \\ &u(x,0) = f(x), \ \ u_t(x,0) = g(x), \ 0 \leq x \leq \pi \end{aligned} \qquad (ONH)$$

(a) **(0.5 puntos)** Interprétese (ONH) desde el punto de vista de la Física.

(b) **(1.5 puntos)** Defínase con precisión el concepto de solución de (ONH) y pruébese que (ONH) tiene, a lo sumo, una solución.

(c) **(1 punto)** Si f y g son funciones de la forma

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{m} a_n \cos(nx), \quad g(x) = b_0 + \sum_{n=1}^{p} b_n \cos(nx),$$

siendo $a_n, \ 0 \leq n \leq m, \ b_n, \ 0 \leq n \leq p$, números reales dados, ¿cuál es la única solución de (ONH)?

(d) **(0.5 puntos)** Enúnciese un teorema general de existencia de soluciones de (ONH), proporcionando la fórmula de la única solución.

(3) (**Valor total del ejercicio: 4.5 puntos**)

(a) (**0.5 puntos**) Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales acotada. Demuéstrese rigurosamente que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(\frac{2n-1}{2}x)e^{-(\frac{2n-1}{2})^2 t} = u(x,t) \tag{1}$$

es convergente para $t > 0$.

(b) (**2 puntos**) Si $v_n(x,t)$ es una sucesión de funciones de dos variables, definidas en subconjunto ω de $\mathbb{R}^2$ y $(x_0, t_0) \in \omega$, establézcanse condiciones precisas que permitan afirmar que

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x,t)\right)_{(x_0,t_0)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial v_n(x_0,t_0)}{\partial x} \tag{2}$$

Usando dichas condiciones, pruébese rigurosamente que la función u definida en (1), es $C^{\infty}(\Omega)$ donde $\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : t > 0\}$.

(c) (**1 punto**) Si, además, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n|$ es convergente, demuéstrese que la función u definida en (1) es de clase C^1 en $\overline{\Omega}$.

(d) (**1 punto**) Bajo las hipótesis del apartado anterior, para cada $T > 0$ dado escríbase con precisión, el problema de tipo mixto que verifica la función u en $[0, \pi] \times [0, T]$, incluyendo las condiciones de contorno y las condiciones en el tiempo inicial $t = 0$.