Series de Taylor y Series de Fourier: Un estudio comparativo

7 de septiembre de 2015

Trabajo Fin de Grado presentado por Alejandra Torres Martínez

Director: Antonio Cañada Villar

DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO

FACULTAD DE CIENCIAS

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Índice general

1. Introducción 3

2. Series de Taylor 7
2.1 Consideraciones históricas sobre Taylor y su "fórmula".....7
2.1.1 Discusión heurística sobre el razonamiento de Taylor 9
2.2 Polinomios de Taylor. Convergencia y algunas aplicaciones 11
2.2.1 Teorema de Taylor 15

3. Series de Fourier 19
3.1 Consideraciones históricas sobre Fourier y sus coeficientes 19
3.2 Algunas notas sobre convergencia de series de Fourier 23
3.2.1 Convergencia puntual de series de Fourier. Ejemplos 28
3.2.2 Convergencia uniforme de series de Fourier. Ejemplos 37

4. Conclusiones 41
4.1 Sobre el origen 41
4.2 Sobre la convergencia 42
4.3 Sobre las aplicaciones 43

5. Summary 45

Parte I

INTRODUCCIÓN

En esta introducción pretendemos describir el trabajo desarrollado atendiendo más bien a las ideas que al rigor.

En el estudio de funciones nos planteamos con asiduidad la aproximación de éstas mediante otras funciones más sencillas. Sabemos que la recta tangente a una función $f(x)$ en un punto $x = x_0$ es aquella recta que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ y tiene como pendiente la primera derivada de la función en el punto, lo que hace que la recta tangente y la función sean prácticamente indistinguibles cerca del punto en cuestión desde el punto de vista de la aproximación lineal. De hecho, la recta tangente es la mejor aproximación lineal a la gráfica de f en un entorno del punto $(x_0, f(x_0))$.

Si x se encuentra "lejos" de x_0, la recta tangente puede no ser una buena aproximación. La recta tangente es un polinomio de grado 1, el tipo más sencillo de función que podemos encontrar, por lo que parece natural preguntarnos si es posible encontrar un polinomio de grado dos que aproxime nuestra función (véanse [20],[21]).

El proceso de derivación de funciones reales de variable real puede obviamente iterarse, obteniendo la segunda derivada y sucesivas derivadas de una función. La existencia de la derivada n-ésima en un punto dará lugar a una aproximación aún mejor, mediante un polinomio de grado menor o igual que n, llamado polinomio de Taylor.

Los polinomios de Taylor aproximan mejor a la función localmente (en el entorno de un punto) cuanto mayor sea el orden del polinomio. Resulta entonces natural extender la noción de polinomio de Taylor a la de serie de Taylor dejando que n tienda a infinito y preguntarse si, dada una función f de clase infinito, la serie de Taylor converge en todo punto a la función f. Para responder esta cuestión veremos en el trabajo un teorema que afirma que si una función es de clase infinito en cierto intervalo y tiene todas sus derivadas uniformemente acotadas para todo punto del intervalo, entonces la función coincide con su serie de Taylor en todo punto del intervalo.

La diferencia entre la función original y su polinomio de Taylor se conoce como resto de Lagrange o resto de Taylor. La "rapidez" con la que el resto de Larange tiende a cero al acercarnos al punto en cuestión viene dada por el Teorema de Taylor-Young. En algunos textos suele llamarse Teorema de Taylor con resto infinitesimal o forma infinitesimal del resto de Taylor y afirma que el resto de Taylor de orden n de f en x centrado en a es un infinitesimo de orden superior que la potencia $n-$ésima de $(x-a)$ en el punto a (consultar [2]).

No obstante, este resultado no nos permite calcular el error que se comete en la aproximación. Una estimación más precisa es posible mediante el conocido Teorema de Taylor, una generalización del Teorema del Valor Medio pero incluyendo derivadas sucesivas de una función. Esta fórmula debe su nombre a Brook Taylor (1685, Edmonton-1731, Londres). El matemático británico añadió a las matemáticas una nueva rama que ahora se llama "cálculo de diferencias finitas" y descubrió la célebre fómula. Pero no se debe pensar que Taylor fue el único matemático que trabajaba en este tema. También Newton, Leibniz, Bernouilli o Moivre descubrieron variantes al Teorema de Taylor. La importancia de este teorema, que queda recogido en este trabajo, permaneció desconocida hasta 1772, cuando Lagrange expuso los principios básicos del cálculo diferencial.

La "fórmula de Taylor" es uno de los resultados fundamentales del Análisis Matemático y cuenta con un amplio abanico de aplicaciones. Su origen está ligado con problemas de gran aplicación a la Ciencia como pueden ser problemas de optimización y aproximación de funciones.

Ahora bien, si la propia función no tiene "buen comportamiento" no vamos a poder aproximarla por polinomios. El buen comportamiento que vamos a necesitar para poder calcular polinomios de Taylor es que f sea continua y varias veces o infinitamente derivable.

Por otro lado, la idea del Análisis de Fourier es muy similar, sólo que ahora nos planteamos la aproximación de una función por combinaciones lineales de funciones del tipo seno y coseno. La re-

presentabilidad de una función arbitraria por medio de una serie trigonométrica fue estudiada por algunos investigadores a finales del siglo XVIII y principios del siglo XIX. Uno de ellos fue el matemático francés Jean Baptiste Fourier (1768, Auxerre, Francia-1830, París) "que dió una primera demostración de que cualquier función admite una representación en serie trigonométrica" y da nombre a esta disciplina tan importante en la Matemática actual como es el Análisis de Fourier ([14]).

En su obra Fourier comienza deduciendo la ecuación que gobierna la difusión del calor. Después resuelve el problema de la distribución de temperatura en un tiempo dado a partir de la distribución en el instante inicial. Para ello introduce el método de separación de variables, también conocido como método de Fourier. Para escribir la solución necesita escribir la función que da el dato inicial como suma de una serie trigonométrica. Éste es el aspecto del trabajo de Fourier del que nos vamos a ocupar, dejando a un lado otros méritos ([13]).

Una vez planteado el problema de la representación de funciones por series trigonométricas, los intentos de probar la convergencia de series de Fourier aparecieron inmediatamente. Poisson y Cauchy publicaron sendas pruebas incorrectas, siendo Dirichlet quien, en 1829, publicó el primer resultado correcto de convergencia.

La contribución más importante de la teoría de las series de Fourier después de que Dirichlet estableciera sus condiciones, fue la de Riemann en 1854 sobre series trigonométricas. Su trabajo fue publicado por su amigo Dedekind en 1868. En ese trabajo Riemann construyó funciones con una cantidad infinita de discontinuidades y estudió la posibilidad de representarlas por series de Fourier.

Durante el resto del siglo XIX se obtuvieron condiciones todavía más generales para la convergencia de series de Fourier. Algunos resultados más recientes sobre convergencia de la serie de Fourier son citados a lo largo del trabajo y hacemos un hincapié especial sobre el criterio de Dini.

En el caso general y para una función de período 2π el problema consiste en, dada una cierta función f, encontrar una serie trigo-

nométrica cuya suma coincida con $f(x)$ para cada x. El criterio de Dini sostiene que si $(f(x+c)-f(x))/c$ es integrable en un entorno de cero en la variable c, entonces la serie de Fourier de f converge puntualmente a $f(x)$.

Pues bien, en este trabajo proponemos llevar a cabo un estudio de ciertos aspectos de las series de Taylor y series de Fourier:

En una primera parte parte nos centramos en la figura de Taylor haciendo un recorrido por el contexto histórico y matemático de su época y, describimos cómo llegó Taylor a la fórmula que lleva su nombre. Respecto de ésta, hemos de decir que la notación utilizada por Taylor, basada en "puntos" y "primas", combinados con subíndices y superíndices era muy complicada ([6]). En otra sección del mismo capítulo repasamos y demostramos algunos resultados fundamentales sobre convergencia de series de Taylor como el Teorema de Taylor-Young o el Teorema de Taylor de los que hemos hablado anteriormente.

En una segunda parte abordamos distintos aspectos sobre el personaje de J.B. Fourier, empezando con una breve reseña histórica de la forma en la cual se estuvo atacando el problema de la representación en serie trigonométrica de una función para, más tarde, tratar sobre la convergencia de dicha serie. En esta sección sobre convergencia presentamos el marco natural de trabajo para las series de Fourier en el que nos apoyaremos para demostrar criterios de convergencia uniforme y convergencia puntual de dichas series como es el criterio de Dini. También, se recogen algunos ejemplos de aplicación de estos resultados para alcanzar un enfoque más práctico.

Finalmente, en la última parte del trabajo se ha intentado establecer un estudio comparativo entre las series de Taylor y las series de Fourier centrado en resaltar analogías y diferencias entre ambas series en cuanto a origen, convergencia y aplicaciones más significativas se refiere.

Parte II

SERIES DE TAYLOR

2.1 Consideraciones históricas sobre Taylor y su "fórmula".

Brook Taylor (1685, Edmonton - 1731, Londres), matemático británico, entró en la Universisdad de St. John de Cambridge como estudiante en 1701. Se graduó en 1709, pero para entonces ya había escrito su primer trabajo importante en matemáticas (en 1708) que, sin embargo, no se publicaría hasta seis años después en la revista Transacciones Filosóficas de la Royal Society. También, en 1712, fue nombrado miembro de esa prestigiosa sociedad, y formó parte de la comisión que debía juzgar si la autoría del calculo diferencial correspondía a Newton (1642-1727) o a Leibniz (1646-1716). El año 1714 marca el año en que Taylor fue elegido secretario de la Royal Society. El periodo 1714-1718, año en que dejó la secretaría por motivos de salud, es el más importante por sus aportaciones en Matemáticas. Dos libros que aparecieron en 1715, *Methodus incrementorum directa et inversa* y *Linear Perspective*, son extremadamente importantes en la historia de las matemáticas ([19]).

Taylor añadió a las matemáticas una nueva rama que ahora se llama "cálculo de diferencias finitas" y descubrió la célebre fórmula conocida, hoy en día, como fórmula de Taylor. Estas ideas son recogidas en su libro *Methodus incrementorum directa et inversa* antes mencionado. No se debe pensar que Taylor fue el único matemático que trabajaba en este tema: Newton, Leibniz, Bernouilli (1667-1748) y Moivre (1667-1754) también descubrieron variantes al teorema de Taylor. La importancia de este teorema permaneció desconocida hasta 1772, cuando Lagrange (1736-1813) expuso los principios básicos del cálculo diferencial.

Fue durante el siglo anterior, el Siglo XVII, comúnmente llamado "Siglo del Genio" dentro de la terminología matemática, cuando se gestaron algunas de las ideas más importantes de la matemática. Cabe mencionar los trabajos de Fermat (1608-1665), sobre teoría de números, los orígenes de la teoría de probabilidades, debidos a Fer-

mat y Pascal (1632-1662), la invención por Descartes (1596-1650) y Harriort (1560-1621) de la geometría analítica, el desarrollo de la geometría pura por Pascal, la invención de los logaritmos por Napier (1550-1617) y la creación y posterior desarrollo del Cálculo de la mano de Newton y Leibniz. ¿Por qué se produjo este desarrollo tan espectacular de las matemáticas en el siglo XVII?

Sin ninguna duda, son las circunstancias políticas, económicas, sociales, etc, las que determinan el desarrollo científico, una parte del cual es el desarrollo matemático. Así, durante el siglo XVI y principios del XVII diversas circunstancias contribuyeron a que la humanidad tuviese una visión principalmente cuantitativa del Universo y del mundo que le rodeaba. En primer lugar, un cambio en la naturaleza del pensamiento humano que despertó un escepticismo generalizado, haciendo dudar a los científicos de la infabilidad de los trabajos de Euclides y sus Elementos, el trabajo de Ptolomeo sobre astronomía, Apolonio sobre las cónicas, entre otros.

El siglo XVII se caracterizó, también, por un activo intercambio de ideas entre los intelectuales de la época originando un enriquecimiento mutuo y una gran beneficio para el desarrollo de las Ciencias. Todo esto, unido a la preocupación de los científicos por resolver ciertos problemas no resueltos hasta entonces, como podían ser encontar la ecuación de la tangente a una curva dada en un punto, determinar los valores máximos y mínimos de una función dada, etc, hicieron posible grandes creaciones matemáticas. Destaquemos el Cálculo Diferencial e Integral por su estrecha relación con Taylor ([6]).

Volviendo a nuestro tema, Taylor, discípulo de Newton, estuvo, entre otras cosas, interesado en el problema del desarrollo de funciones usando otras más sencillas. Era entonces conocido que una función polinómica $f(x)$ de grado n,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

se puede escribir como

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + ... + c_n h^n$$

para todo par de números a y h, y los coeficientes $c_k,\ 0 \leq k \leq n$ obedecen a la relación $c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a)$ con $1 \leq k \leq n,\ c_0 = f(a)$.

Newton, entre otros, había también observado que muchas funciones conocidas, no necesariamente polinómicas, podían expresarse como "polinomios infinitos" con coeficientes verificando determinadas reglas similares a lo anterior.

Por ejemplo,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \qquad si \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + ... + (-1)^n x^{2n} + ... \quad si \quad |x| < 1$$

Taylor usando algunas ideas del "cálculo de diferencias finitas" y, persiguiendo una generalización de lo anterior, descubrió la célebre "fórmula de Taylor":

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2 \frac{f''(x)}{2!} + ...$$

válida bajo ciertas condiciones sobre la función f que especificaremos más tarde.

2.1.1 Discusión heurística sobre el razonamiento de Taylor (diferencias finitas y paso al límite).

Es interesante mostrar, de manera heurística, cómo se cree que llegó Taylor a tal fórmula, que ya fue anunciada por él mismo en 1712 (véase [6]).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función y r un número positivo fijo. Se define

$$\Delta f(x) = f(x+r) - f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Delta^2 f(x) = \Delta(\Delta f(x)), \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

y así sucesivamente. Si la variable x pasa del valor x al valor $x+nr$, para $n \in \mathbb{N}$, entonces $f(x)$ pasa a valer $f(x+nr)$ y se tiene:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{n}{1}\Delta f(x) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\Delta^2 f(x) + ... + \frac{n(n-1)\cdots 1}{1\cdot 2\cdots n}\Delta^n f(x) \tag{1}$$

Los coeficientes de $f(x)$, $\Delta f(x)$, $\Delta^2 f(x)$ se forman de la misma manera que los coeficientes del desarrollo del binomio $(a+b)^n$. Dichos coeficientes son 1, $\frac{n}{1}$, $\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, $\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}$, ...

A (1) se le conoce como Fórmula de Interpolación de Newton.

Ahora, si h es un número dado positivo, tomando n y r tales que $nr = h$, entonces r tiende a cero cuando n tiende a infinito y, recíprocamente. Escribimos (1) de la forma:

$$f(x+nr) = f(x) + \frac{nr}{1}\frac{\Delta f(x)}{r} + \frac{n(n-1)r^2}{1\cdot 2}\frac{\triangle^2 f(x)}{r^2} + ... + \frac{n(n-1)\cdots 1\cdot r^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{\triangle^n f(x)}{r^n}$$

Ahora, según Taylor, si r tiende a cero, n tiende a infinito y se tiene

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h^2\frac{f''(x)}{2!} + ...$$

Podemos decir, de manera informal, que "la fórmula se obtuvo a partir de la fórmula de interpolación de Newton, para un número

infinitamente grande de pasos y trabajando con números infinitamente grandes e infinitamente pequeños".

Desde su descubrimiento, la fórmula de Taylor ha proporcionado un método potente para solucionar distintos problemas del análisis matemático como pueden ser el cálculo de límites indeterminados, discusión general del problema de máximos y mínimos, desarrollo en serie de funciones trascendentes y procedimientos numéricos de aproximación de tales funciones.

En general, la teoría de "polinomios de Taylor infinitos" se puede considerar como parte de la teoría de funciones analíticas, muy importante dentro del análisis matemático desde el siglo XIX.

A continuación describimos, rigurosamente, algunos resultados teóricos importantes de la fórmula de Taylor. La demostración de estos resultados se puede ver, por ejemplo en los apuntes ([18]) o en el libro ([3]).

2.2 Polinomios de Taylor. Convergencia y algunas aplicaciones.

En este apartado mostramos algunos hechos relativos a la aproximación de una función por su polinomio de Taylor de orden n. También destacamos el papel del polinomio de Taylor en el estudio de máximos y mínimos relativos (véanse [3], [4], [12], [18]).

Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es dos veces derivable en I y la función $f'' := (f')'$ se llama derivada segunda de f en I .

En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n+1$ veces derivable en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I, que representaremos por $f^{(n)}$, es derivable en I. En este caso, la función $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$ se llama derivada de orden $n+1$ de f en I. Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable en I y la función $f^{(n)}$ es continua en I. Se dice que

f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos los órdenes en I. Por convenio se define $f^{(0)} = f$.

Definición. Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por

$$T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

se llama el polinomio de Taylor de orden n de f en a.

El siguiente teorema se puede ver, por ejemplo, en los apuntes del Prof. F. J. Pérez González ([18]).

Teorema (Teorema Taylor -Young). Sea f una función n veces derivable en un punto a y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración. Usaremos un argumento de inducción y la regla de L'Hôpital. Para $n = 1$ el enunciado es cierto simplemente por la definición de derivada de una función en un punto. Supongamos cierto el enunciado para toda función n veces derivable en a. Sea f una función $n+1$ veces derivable en a. Entonces la función $g = f'$ es n veces derivable en a, luego:

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)-T_n(g,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Es inmediato comprobar que $T'_{n+1}(f,a)(x) = T_n(g,a)(x)$ y se obtiene que

$$g(x)-T_n(g,a)(x) = \frac{d}{dx}(f(x)-T_{n+1}(f,a)(x))$$

Por la regla de L'Hôpital resulta:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_{n+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x\to a}\frac{g(x)-T_n(g,a)(x)}{(n+1)(x-a)^n} = 0$$

lo que finaliza la demostración.

El teorema afirma que, bajo hipótesis apropiadas, $T_n(f,a)(x)-f(x)$ tiende a cero, cuando x tiende al punto a, más rápidamente que $(x-a)^n$.

En el teorema anterior se ha probado que

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0$$

Esto es óptimo en el sentido siguiente: si en el denominador se considera $(x-a)^{n+1}$ en lugar de $(x-a)^n$ entonces, en general, el límite del cociente no es cero, sino que vale $\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a)$ (veáse el corolario siguiente).

El siguiente corolario se obtiene aplicando de forma reiterada la regla de L'Hôpital.

Corolario ([18]). Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a \in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a).$$

Teorema. Condiciones suficientes de extremo relativo ([18]).

Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f : I \to \mathbb{R}$ una función $n \geq 2$ veces derivable en a. Supongamos que todas las derivadas de f hasta la de orden n–1 inclusive se anulan en a, es decir, $f^{(k)}(a) = 0$ para $k = 1, 2, ..., n-1$, y que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Entonces:

i) Si n es par y $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

ii) Si n es par y $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

iii) Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Demostración. De las hipótesis hechas y el anterior corolario se deduce que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Por la definición de límite (o por el teorema de conservación local del signo), existe un número $r > 0$ tal que $]a–r, a + r[\subset I$ y para $x \in]a–r, a + r[$, $x \neq a$ se tiene que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n} f^{(n)}(a) > 0.$$

Si n es par $(x-a)^n > 0$, así que si $f^{(n)}(a) > 0$ será $f(x)-f(a) > 0$ para todo $x \in]a–r, a + r[\backslash\{a\}$, esto es, f tiene un mínimo relativo (estricto) en el punto a; si, por el contrario, $f^{(n)}(a) < 0$ será $f(x)-f(a) < 0$ para todo $x \in]a–r, a + r[\backslash\{a\}$, esto es, f tiene un máximo relativo (estricto) en el punto a.

Si n es impar $(x-a)^n < 0$ para $a–r < x < a$ y $(x-a)^n > 0$ para $a < x < a + r$. Para $a–r < x < a$, $f(x)–f(a)$ tiene signo opuesto al

que tiene para $a < x < a+r$. Deducimos que f no tiene un extremo relativo en a.

Nota.

El teorema anterior proporciona un criterio general de determinación de máximos y mínimos locales o relativos. Hagamos énfasis en que los máximos y mínimos globales, si existen, son otra cosa: necesitaríamos, en general, conocer los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f, o tener propiedades adicionales como la convexidad.

El siguiente teorema (llamado Teorema de Taylor) es una generalización del Teorema del Valor Medio.

2.2.1 Teorema de Taylor.

Teorema (Teorema de Taylor) ([18]). Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración. Fijamos los puntos x y a. Definimos una función $g : I \to \mathbb{R}$

$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k, \quad \forall t \in I$$

Es fácilmente comprobable que

$$g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones g y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo de extremos x y a, obteniendo que hay un punto c comprendido entre x y a tal que

$$(h(x)-h(a))g'(c) = (g(x)-g(a))h'(c)$$

Como $g(x) = h(x) = 0$, se tiene que:

$$(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = g(a)(n+1)(x-c)^n$$

y, teniendo en cuenta que $g(a) = f(x)-T_n(f,a)(x)$, se obtiene la igualdad.

Se llama **resto de Lagrange** al número

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Si es posible probar una desigualdad de la forma

$$\frac{|f^{(n+1)}(c)|}{(n+1)!}|(x-a)|^{n+1} \leq \varepsilon$$

podemos afirmar que el error cometido al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$ es menor que ε.

Finalmente,

Dada $f \in C^\infty(I)$, I abierto y $a \in I$. Sea $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ la serie de Taylor de f en $x = a$. Entonces cabe preguntarse si se da la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in I$$

En general, esto es falso.

Ejemplo. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida de la forma

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Se cumple $f \in C^\infty$ y $f^{(n)}(0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, su desarrollo de Taylor en $a = 0$ es 0 que, evidentemente, no coincide con la función, salvo en el origen.

No obstante, tenemos el siguiente resultado:

Teorema ([1]). Sea I un intervalo y $f \in C^\infty(I)$. Supongamos que existe una constante $M > 0$ tal que

$$| f^{(n)}(x) | \leq M \quad \forall x \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Entonces,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall a, x \in I.$$

La demostración de este hecho es sencilla teniendo en cuenta la fórmula de resto de Lagrange, pues

$$| f(x) - T_n(f,a)(x) | \leq \frac{M \mid x-a \mid^{n+1}}{(n+1)!}$$

y, el segundo miembro de la desigualdad tiende a 0 cuando n tiende a infinito. Por tanto, $\lim_{n\to+\infty} T_n(f,a)(x) = f(x)$.

Es decir, si las derivadas de una función están uniformemente acotadas entonces la serie de Taylor coincide con la función. Si la función y sus derivadas no están uniformemente acotadas es posible que la función no coincida con su desarrollo de Taylor como hemos visto con el ejemplo anterior.

El teorema anterior permite afirmar que, por ejemplo

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ..., \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$sen(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ..., \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

y fórmulas análogas para otras muchas "funciones elementales".

Parte III

SERIES DE FOURIER

3.1 Consideraciones históricas sobre Fourier y sus coeficientes.

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768, Auxerre, Francia - 1830, París), matemático y físico francés, inició sus estudios en la escuela de Pallais, dirigida por el maestro de música de la catedral. Ingresó en 1780 en la École Royale Militaire de Auxerre y, muy pronto, mostró su interés por las matemáticas. A los 14 años había completado el estudio de los seis volúmenes del *Cours de Matemáticas* de Bezout y a los 15 años recibía el primer premio por su estudio de *Mécanique en général* de Bossut.

En 1794 entró en la École Normale de París, donde contó con profesores de la talla de Lagrange y Laplace (1749-1827) y donde él mismo desarrollaría, posteriormente, labores de tipo docente. En 1795 ocupó una cátedra en la prestigiosa École Polytechnique de París y tres años más tarde, se unió al ejército de Napoleón en su campaña en Egipto. Fue allí donde fundó el Instituto de El Cairo del cual fue secretario hasta su regreso a Francia en 1801, volviendo a su puesto como profesor de Análisis en la École Polytechnique.

Alrededor de 1804 comenzó su importante trabajo matemático sobre la teoría del calor y en 1807 había completado su libro acerca de la propagación del calor en cuerpos sólidos. En 1817, fue elegido miembro de la Academia Francesa de las Ciencias y cinco años más tarde se convierte en secretario de la sección de matemáticas. Además, publica su *Théorie Analytique de la Charleur*, tratado en el cual estableció la ecuación en derivadas parciales que gobierna la difusión del calor, solucionándola mediante series infinitas de funciones trigonométricas como veremos después.

Durante sus ocho últimos años en París reanudó sus investigaciones matemáticas y publicó una serie de documentos, algunos en matemáticas puras y otros sobre temas de matemáticas aplicadas

([19]). Entre otras cosas, el trabajo de Fourier proporcionó el impulso para el trabajo posterior sobre series trigonométricas y la teoría de funciones de variable real.

Seamos más precisos en la descripción del trabajo de Fourier.

La historia moderna del análisis de Fourier comienza a mediados del siglo XVIII, cuando varios matemáticos (D'Alembert, Euler; Bernouilli) estudian el movimiento de una cuerda vibrante. D'Alembert (1717-1783) demostró que si la función $u(x,t)$ representa el desplazamiento vertical de la cuerda en la coordenada x (suponemos $0 \leq x \leq \pi$ por simplicidad) y en el tiempo t, entonces

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0$$

Esta ecuación (llamada ecuación de ondas) tiene infinitas soluciones y se trataba de obtener la que cumpla unas condiciones iniciales y de contorno predeterminadas. Así, si la posición inicial de la cuerda viene dada por una función f , la velocidad inicial de la misma es cero, y la cuerda está fija en sus extremos, la función u satisface un problema de tipo mixto de la forma:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \qquad 0 < x < \pi \qquad t > 0$$

$$\begin{aligned} u(x,0) = f(x), \quad u_t(x,0) = 0, \qquad & 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad & t \geq 0. \end{aligned}$$

D'Alembert y Euler (1707-1783) publicaron independientemente soluciones al problema anterior de la forma

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)]$$

siendo $\tilde{f}$ la extensión a $\mathbb{R}$, impar y 2πperiódica de la función f ([7]).

Euler discrepaba de D'Alembert en el tipo de funciones iniciales f que podían ser consideradas. Mientras que para D'Alembert f debería tener una única expresión analítica, Euler defendía que no había razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas funciones que, en diferentes partes de $[0, \pi]$, tuviesen expresiones distintas siempre que la posición resultante, al considerarlas unidas, tuviese una cierta regularidad. Hay que tener en cuenta que, para los matemáticos contemporáneos de Euler era admitido que cada función daba lugar a una gráfica pero no recíprocamente, cuando la gráfica en cuestión tenía diferentes expresiones en distintos intervalos. Estas diferencias son una de las primeras manisfestaciones sobre los problemas que acarrea la definición de la noción de función. En resumen, Euler defendía que cualquier gráfica podía ser considerada como una curva inicial, hecho que no era compartido por D'Alembert.

Otra forma de abordar el problema fue propuesta por Daniel Bernouilli (1700-1782) en 1753, basándose en consideraciones de tipo físico, que le llevan a pensar que la cuerda oscila con varias frecuencias al mismo tiempo, cuyas amplitudes relativas dependen de las condiciones iniciales de la vibración. Esta característica, descubierta por Bernouilli, es lo que se conoce como principio de superposición. La solución propuesta consiste en una serie trigonométrica de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx) cos(nt), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

para una adecuada elección de los coeficientes f_n ([7]).

Esta versión expuesta por Bernouilli no tuvo aceptación en su tiempo. En particular, Euler objetaba que la idea de Bernouilli llevaba a un resultado paradójico como es el hecho de que una función arbitraria pueda ser expresada en forma trigonométrica. En su tiempo, las curvas se dividían en dos clases: curvas continuas y curvas geométricas. Una curva se decía continua si ordenadas y abcisas podían conectarse por alguna fórmula $y = f(x)$. Y una curva se denominaba geométrica si podía dibujarse con trazos continuos o discontinuos. Pensaban, pues, que la segunda categoría era más am-

plia que la primera, ya que, lo que nosotros consideramos como una función C^1 a trozos puede dibujarse pero, no expresarse necesariamente con una sola expresión analítica. Luego, si una función arbitraria podía expresarse, por ejemplo, como serie de senos, entonces cualquier curva geométrica sería continua, lo cual no era admisible por entonces. Por otro parte, D'Alembert consideraba que la manera más natural de hacer que una cuerda empezase a vibrar era desplazarla de su posición de equilibrio tirando de algún punto de ella. Esto hace que su posición inicial se pueda representar mediante dos rectas que forman un determinado ángulo. Para D'Alembert, esto haría imposible pensar que pudiese expresarse como una serie trigonométrica debido a la no derivabilidad de tal función ([17]).

Jean Baptiste Joseph Fourier, cincuenta y cuatro años más tarde y para el problema de la propagación del calor, examinó con detalle las ideas de Daniel Bernouilli. El matemático francés se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. En concreto, Fourier consideró una varilla delgada de longitud dada cuyos extremos se mantienen a 0^{o} centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la función $f(x)$ representa la distribución inicial de la temperatura en la varilla (suponemos que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante) cabe preguntarse cuál será la temperatura de cualquier punto x en el instante $t > 0$. Fourier demostró que si $u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t, entonces la función u debe satisfacer ([9],[10]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi, \;\; 0 < t < T \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \qquad\qquad 0 \leq t \leq T \\ u(x,0) &= f(x), \qquad\qquad 0 \leq x \leq \pi \end{aligned}$$

Siguiendo el razonamiento de Bernouilli, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor sujetas a las condiciones de contorno. Usó, para ello, el método de separación de variables y garantizó que la solución del problema venía dada

como superposición de tales soluciones. Más concretamente, formuló como solución a la función u dada por la serie:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n exp(-n^2 t) sen(nx)$$

donde

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx) dx \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Para una exposición detallada de cómo llegó Fourier a la expresión de estos coeficientes, puede consultarse [8]. Por cierto, una parte importante de la demostración de Fourier usa el desarrollo de Taylor de la función $f(x)$ y de las funciones trigonométricas $sen(nx),\ n \in \mathbb{N}$. En una primera etapa Fourier impuso que la función $f(x)$ admitía un desarrollo en serie de potencias, para pasar después, mediante complicados procedimientos y mucho ingenio, a funciones $f(x)$ "generales y arbitrarias".

La expresión de f_n es, sin duda, una de las contribuciones fundamentales de Fourier y marca una diferencia notable respecto del trabajo de Bernouilli (véase [7]).

3.2 Algunas notas sobre convergencia de series de Fourier.

El marco natural de trabajo para las Series de Fourier es, hoy en día, el espacio $L^2(a,b)$, que describimos brevemente a continuación.

Sea $[a,b]$ el intervalo cerrado de extremos a y b, siendo a y b dos números reales dados. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible, diremos que f es de cuadrado integrable si la integral $\int_a^b \mid f(x) \mid^2 dx$ existe en el sentido de Lebesgue y es finita.

Dados *f, g* dos elementos de $L^2(a,b)$ se consideran iguales si lo son casi por doquier en [a,b] (es decir, $f(x) = g(x)$ salvo en un subconjunto de $[a,b]$ de medida nula). Esto es:

$L^2(a,b) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R}\, medible : \int_a^b f^2(x)\,dx < +\infty\}$ y si $f, g \in L^2(a,b)$, $f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)\, c.p.d\, en\, [a,b]$.

$L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real con la suma usual de funciones y el producto usual de un número real por una función. Si *f, g* son dos elementos de $L^2(a,b)$ se puede definir el producto escalar de f y g, $< f, g >$, como $< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$, $\forall f, g \in L^2(a,b)$.

Con este producto escalar, $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita (véase, por ejemplo, [8]).

Definición de base (hilbertiana) en $\mathbf{L^2(a,b)}$ ([8]).

Sea $B = \{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Diremos que B es base hilbertiana de $L^2(a,b)$ si y sólo si cualquier elemento f de $L^2(a,b)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$$

(es decir, $\lim_{k\to\infty} \left[f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n \right] = 0,\ en\ L^2(a,b)$.

En numerosas ocasiones, disponer de criterios equivalentes, para demostrar que ciertos subconjuntos ortonormales son base de $L^2(a,b)$, puede ser muy útil. En este sentido tenemos el teorema siguiente.

Teorema. Caracterización del concepto de base (consultar [8]).

Sea $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Son equivalentes:

a) $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de $L^2(a,b)$.

b) Para cualquier f de $L^2(a,b)$ se cumple la llamada **igualdad de Parseval**

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f,\, f_n >|^2$$

c) El único elemento de $L^2(a,b)$ ortogonal al conjunto $\{f_n,\, n \in \mathbb{N}\}$ es el elemento cero (esto es, $si\ f \in L^2(a,b)$ verifica $< f, f_n >= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f = 0$).

Centraremos nuestro estudio en una base muy especial que es la que se suele utilizar en los desarrollos en serie de Fourier. El siguiente resultado muestra una base del espacio $L^2(-\pi,\pi)$. Es inmediata la construcción de una base en $L^2(a,b)$ cualquiera a partir de un cambio de variable.

Teorema (Lebesgue, 1902) (consultar [8]).

El conjunto $B = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{cos(n(.))}{\sqrt{\pi}}, \frac{sen(n(.))}{\sqrt{\pi}}, n \in \mathbb{N}\}$ es una base hilbertiana de $L^2(-\pi,\pi)$.

Del teorema anterior se tiene que para cualquier función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, f se expresa de la forma

$$f =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} [< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(.)) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(.)) +$$

$$+ < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(.)) > \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(.)), \quad \forall n \in \mathbb{N}]$$

de donde se deduce

$$f = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\centerdot)) + B_n sen(n(\centerdot))) \tag{3}$$

en el espacio $L^2(-\pi, \pi)$, siendo

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Nota.

El teorema anterior de Lebesgue confirma, un siglo después de lo anunciado por Fourier, las afirmaciones de éste.

Esto motiva la siguiente definición.

Dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, se denomina serie de Fourier de f respecto de la base del teorema de Lebesgue (base trigonométrica) a la serie

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\centerdot)) + B_n sen(n(\centerdot)))$$

con $\{\frac{A_0}{2}, A_n, B_n,\, n \in \mathbb{N}\}$, conjunto de coeficientes de Fourier de f respecto de la base trigonométrica, dados por la expresión anterior.

Comentarios.

1) De la expresión (3) se tiene:

$$f = \frac{A_0}{2} + \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (A_k cos(k(\centerdot)) + B_k sen(k(\centerdot)))$$

en $L^2(-\pi,\pi)$. O lo que es lo mismo,

$$\lim_{n\to\infty} \| f - \frac{A_0}{2} - \left(\sum_{k=1}^{n} \left(A_k cos(k(\cdot)) + B_k sen(k(\cdot)) \right) \right) \| = 0$$

en $L^2(-\pi,\pi)$. Es decir que,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - S_n(x) \right|^2 dx = 0$$

siendo

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(A_k cos(kx) + B_k sen(kx) \right).$$

2) Por el teorema de caracterización del concepto de base, se cumple la igualdad de Parseval.

$$\| f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) \right|^2 dx = < f, f > =$$

$$= \pi \left(\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \right), \quad \forall\, f \in L^2(-\pi,\pi)$$

Comentarios previos al Criterio de Dini.

1) En 1966, L. Carleson probó que si f es una función continua en $[-\pi,\pi]$ tal que $f(\pi) = f(-\pi)$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d en $[-\pi,\pi]$ a f. El mismo año, Kahane y Katzhelson probaron que $\forall\, \Omega \subset [-\pi,\pi]$ de medida nula, existe $f \in L^2(-\pi,\pi)$, f continua en $[-\pi,\pi]$, $f(\pi) = f(-\pi)$ tal que su serie de Fourier no converge en Ω (véase la bibliografía en [8]).

2) Sea $f \in L^2(-\pi,\pi)$ y sea S_n, $n \in \mathbb{N}$, la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier. Como $S_n(f) \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$, entonces existe una subsucesión de S_n, S_{n_k}, tal que $S_{n_k} \to f$ c.p.d, es decir, $S_{n_k}f(x) \to f(x)$ c.p.d en $[-\pi,\pi]$ (véase [8]).

Desde un enfoque práctico, resulta conveniente disponer de un criterio sencillo de manejar para que $S_nf(x) \to f(x)$ con $x \in [-\pi,\pi]$, x dado. Es el llamado Criterio de Dini que veremos a continuación.

3) Previamente, enunciamos un resultado necesario para acometer la demostración del Criterio de Dini sobre convergencia puntual de series de Fourier.

Se conoce como lema de Riemann-Lebesgue (consultar bibliografía en [8]).

Si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx = 0$$

4) Por último, es importante recalcar que la definición de serie de Fourier tiene sentido para funciones de $L^1(-\pi,\pi)$ ya que, en este caso, los coeficientes A_n, B_n están bien definidos.

3.2.1 Convergencia puntual de series de Fourier. Ejemplos.

Criterio de Dini sobre convergencia puntual de series de Fourier (véase [8]).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

i) f es 2π-periódica,

ii) $f\,|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$,

iii) $x \in \mathbb{R}$, es tal que existe $\delta > 0$ tal que la función

$h : (-\delta, \delta) - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $h(\tau) = \frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}$ cumple que $h \in L^1(-\delta, \delta)$.

Entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [A_k cos(kx) + B_k sen(kx)] \right] = f(x)$$

donde

$$A_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\, dx, \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$B_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx)\, dx, \qquad \forall k \in \mathbb{N}$$

Principales ideas de la demostración.

Sea $S_n, n \in \mathbb{N}$ la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, es decir

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} [A_k cos(kx) + B_k sen(kx)] =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n} [\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(kt)\, dt \right) cos(kx) +$$

$$+ \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen(kt)\, dt \right) sen(kx)] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k(t-x)) \right) dt = [t-x = \tau\,;\, dt = d\tau] =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau.$$

Si definimos la función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como

$$g(\tau) = f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right).$$

entonces g es 2π-periódica. Además, el intervalo $[-\pi - x, \pi - x]$ tiene longitud 2π, por tanto

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Por otro lado, usando

$$cos(a)sen(b) = \frac{1}{2}\left[sen(a+b) - sen(a-b)\right], \quad a, b \in \mathbb{R},$$

se tiene

$$sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) = \frac{1}{2}sen\left(\frac{1}{2}\tau\right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)sen\left(\frac{1}{2}\tau\right) = \frac{1}{2}sen\left(n + \frac{1}{2}\right)\tau, \quad \forall \tau \in \mathbb{R}.$$

Defino $\varphi_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ dada por

$$\varphi_n(\tau) = \left\{ \begin{array}{cc} \frac{sen\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right)}{2sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)} & si\, \tau \neq 0 \\ n + \frac{1}{2} & si\, \tau = 0 \end{array} \right\}$$

Se cumple $\varphi_n \in C[-\pi, \pi]$ y

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) = \varphi_n(\tau), \quad \forall \tau \in [-\pi, \pi].$$

Por tanto, integrando en ambos miembros

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) \right) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\tau)\, d\tau$$

de donde

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}\, d\tau + \sum_{k=1}^{n} \left(\int_{-\pi}^{\pi} cos(k\tau)\, d\tau \right) = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\tau)\, d\tau,$$

Por tanto

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\tau)\, d\tau.$$

Si multiplicamos en ambos miembros por $f(x)$

$$f(x)\pi = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \varphi_n(\tau)\, d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\varphi_n(\tau)\, d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se trata de probar que $\lim_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, o lo que es lo mismo,

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(x) - f(x)) = 0.$$

Ahora bien, por los razonamientos previos

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau) - f(x))\,\varphi_n(\tau)\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{((f(x+\tau) - f(x))}{sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)} sen\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau \right) d\tau, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

llamando $r(\tau) = \frac{f(x+\tau)-f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)}, \quad \forall \tau \in [-\pi,\pi] - \{0\}$, queda

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(\tau) sen\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\tau\right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(\tau) cos\left(\frac{1}{2}\tau\right) sen(n\tau)\,d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(\tau) sen\left(\frac{1}{2}\tau\right) cos(n\tau)\,d\tau$$

Dado que $\forall \tau \in [-\pi,\pi] - \{0\}$ se cumple

$$|\, r(\tau)\,| = \left|\, \frac{f(x+\tau)-f(x)}{sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \right| = \left|\, \frac{(f(x+\tau)-f(x))\tau}{sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)\tau} \right| =$$

$$= \left|\, \frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \,\right| \cdot \left|\, \frac{\tau}{sen\left(\frac{1}{2}\tau\right)} \,\right| \leq k \left|\, \frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \,\right|$$

para cierta constante $k > 0$ tenemos que $r \in L^1(-\pi,\pi)$, por lo que, es de aplicación el lema de Riemann-Lebesgue que garantiza

$$\lim_{n\to\infty} (S_n(x) - f(x)) = 0.$$

Algunos comentarios.

1) Una condición suficiente para que se cumpla *iii)* es que exista $f'(x)$.

En efecto,

$$f'(x) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \in \mathbb{R}$$

por tanto, existen constantes M, $\delta > 0$ tales que
$|\ \frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau}\ | \leq M, \quad \forall \tau \in (-\delta, \delta) - \{0\}$.

Con lo que la función $h(\tau) = \frac{f(x+\tau)-f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta, \delta)$ ya que h es medible y acotada.

2) Es claro que otra condición suficiente para que se cumpla *iii)* es que existan $f'(x^-)$ y $f'(x^+)$.

Se deduce con un razonamiento análogo al anterior.

3) Una condición suficiente para que se cumplan *i)*, *ii)*, *iii)* es que $f \in C^1_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Veamos algunos ejemplos significativos de aplicación del criterio de Dini.

Ejemplo 1. Este ejemplo es una aplicación sencilla del Criterio de Dini, pero se obtienen en el mismo algunas conclusiones sorprendentes. Por ejemplo, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1}$ es convergente $\forall x \in \mathbb{R}$. Su suma es constante $(\frac{\pi}{4})$ en el intervalo $(0, \pi)$ y, a pesar de que cada sumando es una función $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1}$ no es continua. Veamos:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en $(-\pi, \pi]$ de la forma

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0,\ \pi \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \end{cases}$$

Usando el criterio de Dini anterior, se puede demostrar que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

siendo $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la extensión 2π-periódica de f.

Se tiene por tanto que

$$\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1} = \begin{cases} -\frac{\pi}{4}, & -\pi < x < 0 \\ 0, & x = 0,\ \pi \\ \frac{\pi}{4}, & 0 < x < \pi \\ extensión & 2\pi - periódica\, a\, \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicando el criterio de Dini,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1} = \widetilde{f}(x) \ \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como curiosidad, hagamos énfasis en que

- Si $x \in (-\pi, 0)$

$$f(x) = -\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1}$$

■ Si $x \in (0, \pi)$

$$f(x) = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1}$$

Concluyendo, $\frac{sen((2n-1)x)}{2n-1} \in C^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y, sin embargo, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)x)}{2n-1} \notin C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Por tanto, entre otras cosas, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen((2n-1)\cdot)}{2n-1}$ no converge uniformemente a f.

Ejemplo 2. Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) =\mid x \mid$. Se define $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) =\mid x \mid, & x \in [-\pi, \pi] \\ extensión, & 2\pi - periódica\, a\, \mathbb{R} \end{cases}$$

Entonces, usando el criterio de Dini se puede demostrar que

$$\widetilde{f}(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k-1)^2} cos\,((2k-1)x) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

De hecho, $\widetilde{f}$ tiene derivadas laterales $\forall x \in \mathbb{R}$.

La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{cos((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$, puesto que

$$\mid \frac{cos(2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2} \mid \leq \frac{1}{\pi(2k-1)^2}$$

y la serie numérica

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

es convergente. Por tanto,

$$\mid x \mid = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4cos((2k-1)x)}{\pi(2k-1)^2}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Notemos que, puesto que la función $\mid x \mid$ no es derivable en $x = 0$, no se puede desarrollar por Taylor. Sin embargo, sí admite un desarrollo de Fourier uniforme en $[-\pi, \pi]$.

Ejemplo 3. Aplicación del criterio de Dini. Mediante el criterio de Dini se pueden sumar muchas series. A continuación, mostramos un ejemplo.

Calcular $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n}$.

Considero $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida en $(0, 2\pi]$ como sigue

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 2\pi \end{cases}$$

y sea $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} x, & 0 < x < 2\pi \\ 0, & x = 2\pi \\ extensión, & 2\pi - periódica\, a\, \mathbb{R} \end{cases}$$

$\widetilde{f}$ cumple las hipótesis del criterio de Dini $\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathbb{N}\}$.

Por tanto

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(nx)}{n}, \quad \forall x \in (0, 2\pi).$$

Entonces, para $x = 1$

$$1 = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n}$$

de donde se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(n)}{n} = \frac{\pi - 1}{2}.$$

3.2.2 Convergencia uniforme de series de Fourier. Ejemplos.

Antes de todo, recordemos el concepto de función absolutamente continua.

Definición
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Diremos que f es absolutamente continua si y sólo si $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$ / $\forall\, (a_1,b_1),...,(a_k,b_k)$ subintervalos disjuntos de (a,b) tales que $\sum_{i=1}^{k} \mid b_i - a_i \mid < \delta$, se tiene que $\sum_{i=1}^{k} \mid f(b_i) - f(a_i) \mid < \varepsilon$.

Se cumple:
• Si f es lipschitziana en $[a,b] \Rightarrow f$ es absolutamente continua en $[a,b]$.
• Si $f \in C^1[a,b] \Rightarrow f$ es absolutamente continua en $[a,b]$.

Notas previas ([8]).

1) El siguiente resultado muestra la relación entre la serie de Fourier de una función y la de su derivada.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$) tal que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. La serie de Fourier de f' puede obtenerse derivando, término a término, la serie de Fourier de f.

2) Este otro resultado nos ayudará en la demostración de un criterio, que enunciamos a continuación y, que nos permite obtener la convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función dada.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que su serie de Fourier converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Entonces, dicha serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Criterio sobre convergencia uniforme de series de Fourier (consultar bibliografía en [8]).

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$) y tal que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Entonces, la serie de Fourier de f converge unirformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Ideas de la demostración.

Si

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\centerdot)) + B_n sen(n(\centerdot)))$$

es la serie de Fourier de f, entonces la serie de Fourier de f', según la primera de las notas previas, es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(n(\centerdot)) - nA_n sen(n(\centerdot))).$$

Aplicando la igualdad de Parseval a f' se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\ f'(x)\ |^2\ dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 B_n^2 + n^2 A_n^2) \right) < \infty.$$

Además, se cumple que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\left(n \mid A_n \mid -\frac{1}{n}\right)^2 = n^2 \mid A_n \mid^2 + \frac{1}{n^2} - 2 \mid A_n \mid \geq 0 \;\Rightarrow \mid A_n \mid \leq \frac{1}{2}\left(n^2 A_n^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\left(n \mid B_n \mid -\frac{1}{n}\right)^2 = n^2 \mid B_n \mid^2 + \frac{1}{n^2} - 2 \mid B_n \mid \geq 0 \;\Rightarrow \mid B_n \mid \leq \frac{1}{2}\left(n^2 B_n^2 + \frac{1}{n^2}\right).$$

Entonces, la serie numérica

$$\frac{\mid A_0 \mid}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mid A_n \mid + \mid B_n \mid)$$

es convergente. Por tanto

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\centerdot)) + B_n sen(n(\centerdot)))$$

converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$ y dicha convergencia es a la función f según la segunda nota previa.

Comentarios.

A continuación vemos algunas condiciones suficientes para que haya convergencia uniforme de la serie de Fourier de f a la función f. Si notamos

$$H = \{\, f \in L^2(-\pi, \pi) / f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} \, absolutamente \, continua, \\ f(-\pi) = f(\pi),\ f' \in L^2(-\pi, \pi)\}$$

se puede demostrar que

$$A = \left\{\, f \in C^1[-\pi, \pi] / f(-\pi) = f(\pi)\right\} \subset H$$

$$B = \{\, f \in C^0[-\pi,\pi]/f(-\pi) = f(\pi),\ existe\, f'(x)\, salvo$$
$$en\, un\, número\, finito\, de\, puntos,\ f'\, medible\, y\, acotada\} \subset H$$
$$C = \left\{\, f \in C^0[-\pi,\pi]/f(-\pi) = f(\pi)\, y\, f\, es\text{"}\, lineal\, a\, trozos\text{"} \right\} \subset H$$

Esto puede ser útil en la práctica, dado que si una función dada f pertenece a algunos de estos subconjuntos, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f en $[-\pi,\pi]$.

Ejemplo. Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) =\mid x \mid$.

Se cumple que $f \in B \subset H$. Por tanto

$$\mid x \mid = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \quad uniformemente\, en\, [-\pi,\pi]$$

tal y como vimos en el ejemplo número dos de aplicación del criterio de Dini.

Nota importante.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y 2π-periódica se tiene que

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$$

uniformemente en $\mathbb{R}$ donde $A_n,\ B_n$ son los coeficientes de Fourier.

Parte IV

Conclusiones

4.1 Sobre el origen.

Los problemas que motivaron el nacimiento de las series de Taylor y las series de Fourier son de naturaleza distinta y se plantearon en tiempos diferentes.

Las series de Taylor surgieron, aproximadamente, en 1715 en relación con diversos problemas no resueltos hasta entonces directamente relacionados con el nacimiento del Cálculo Diferencial e Integral y de gran aplicación a la Ciencia como podían ser:

- Problemas de optimización.
- Encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva dada en un punto.
- Calcular la longitud de ciertas curvas, áreas limitadas por figuras curvas, etc.
- Procedimientos numéricos de aproximación de funciones trascendentes.
- Cálculo de límites indeterminados.

Las series de Fourier surgieron en relación con diferentes problemas relacionados con las ecuaciones de la física matemática como el análisis del conocido "problema de la cuerda vibrante" alrededor de 1750. El problema de la cuerda vibrante fue muy estudiado en el siglo XVIII por D'Alembert, Euler, Daniel Bernouilli y, también, por Taylor. En 1750 Bernouilli, basándose en el hecho intuitivo de que el sonido emitido por una cuerda vibrante es, en general, la composición de varios armónicos, expresó que la solución general podía expresarse como superposición (en general infinita) de ondas sencillas. Estas ideas fueron perfeccionadas por Fourier en 1807 con el fin de proporcionar una teoría matemática de las leyes de la propagación del calor a principios del siglo XIX.

4.2 Sobre la convergencia.

Del estudio comparativo realizado entre las series de Taylor y series de Fourier en lo que a convergencia se refiere, se detectan las siguientes diferencias y analogías ([11]):

Las series de Taylor son series de potencias, mientras que las series de Fourier son series trigonométricas (los criterios de convergencia uniforme y convergencia puntual son diferentes según la base considerada). Por tanto, los criterios de convergencia de ambas series son de diferente naturaleza.

En el caso de series de Taylor vimos un resultado útil sobre la convergencia de la serie: las derivadas de todos los órdenes de la función, en un entorno del punto dado, están uniformemente acotadas según (2). Para el caso de series de Fourier estudiamos el criterio de Dini. Para aplicar este criterio a funciones periódicas necesitamos que la función dada sea, por ejemplo, derivable en el punto considerado.

Ambos resultados sobre convergencia de series nos indican cuándo la serie de Taylor o la serie de Fourier de una función coincide con dicha función.

Además, las series de Fourier se aplican a una clase de funciones "más amplia" que las series de Taylor. Por ejemplo, la función $f(x) =\mid x \mid$ no admite desarrollo en serie de Taylor centrado en el origen y, sin embargo, sí admite desarrollo en serie de Fourier en $[-\pi, \pi]$ tal y como vimos en un ejemplo.

No obstante, las series de Taylor y las series de Fourier no son tan diferentes. Ambas son "series infinitas" que usan, para su desarrollo, funciones más sencillas (polinomios y funciones trigonométricas respectivamente).

4.3 Sobre las aplicaciones.

Algunas de las aplicaciones más significativas de las series de Taylor son:

• Utilizar funciones polinómicas para analizar el comportamiento local de una función y aproximarla.
• Regla de L'Hôpital para el cálculo de límites indeterminados.
• Estimación de números irracionales acotando su error.
• Estudio de máximos y mínimos.
• Estimación de integrales. Precisemos esta afirmación, el Teorema Fundamental del Cálculo nos dice que la integral definida en el intervalo $a \leq x \leq b$ de una función no negativa y continua es el área bajo la curva y el eje de abcisas de dicha función para $x \in [a, b]$. Pues bien, para resolver la integral se busca la primitiva de la función y se evalúa en los extremos del intervalo. Ahora, existen funciones que no tienen primitiva "elemental" como es el caso de $sen(x^2)$. Para buscar la integral definida de esta función se recurre a las series de Taylor.
• Cáculo de la exponencial de una matriz, de aplicación en la teoría de Ecuaciones Diferenciales lineales con coeficientes constantes..

En cuanto a las series de Fourier, dado su carácter periódico, se aplican donde surgen procesos de tipo oscilatorio ([9],[15]):

• Series temporales de naturaleza económica (series de Fourier discretas).
• Electrónica (por ejemplo, teoría de señales).
• Acústica.
• Sismografía.
• Oceanografía.
• Predicción de las mareas.
• Mejora de imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio.
• Estudio de rayos X.
• Análisis químicos.
• Confección de imágenes en medicina.
• Estudio del ritmo cardíaco. La ecografía permite registrar la

vibración de cada una de las membranas del corazón proporcionando una curva periódica, y un programa de ordenador calcula los primeros términos de las sucesiones (coeficientes de Fourier).

• Muchas ecuaciones diferenciales en derivadas parciales admiten soluciones en forma de series de Fourier fácilmente computables.

En conclusión, las aplicaciones de las series de Taylor y series de Fourier son, en general, de naturaleza distinta.

Parte V

Summary

In the study of functions we consider, for example, the approximation of such functions by other simpler functions. We know that the tangent line is that line through a given point with the same slope as the function at the point (first derivative in the point). This makes the tangent line and the function virtually indistinguishably close to the point in question. The tangent line is the best linear approximation to the graph of the function near the point.

If x is far from x_0, the tangent line cannot be a good approximation. The tangent line is a polynomial of degree 1, the simplest type of function that we can found so, it seems natural to ask if it is possible to find a polynomial of degree two that approximates in a better way our function.

The process of derivation of real functions of real variable can be iterated to obtain the second and subsequent derivatives of a function. The existence of the n derivatives at a point will give a better approximation by a polynomial of less or equal degree to n, called Taylor polynomial.

The higher degree of the polynomial, the better approximation by Taylor polynomials. Then, it is natural to extend the notion of polynomial of the Taylor series letting n tends to infinity and ask if , for an infinitely differentiable function f, Taylor series converge at every point of this function. To answer this question we will review in this work a theorem which says if a function is infinitely differentiable in an interval and has all its derivatives are uniformly bounded for every point of the interval, then function coincides with its Taylor series at every point of the interval.

The difference between the origianl function and its Taylor polynomial is called rest of Lagrange or rest of Taylor**.** The speed of the rest of Taylor tends to go to zero when getting closer the point is given by the Taylor-Young Theorem. In some texts this theorem is called infinitesimal formula of rest of Taylor and states that the

rest of Taylor nth centered at x is an infinitesimal higher order than $(x-a)^n$, that is, when x is very close to that point, the value of the function f at x is very close to the value of Taylor polynomial of order n of f at a.

However, this result does not allow us to calculate the error commited on approach. A more accurate estimate is possible by Taylor's formula, a generalization of the Mean Value Theorem but, the formula involves successive derivatives of a function. This formula is named by Brook Taylor (1685, Edmonton-1731, Londres). The British mathematician added to mathematics a new part called "calculation of finite differences" and he discovered the famous formula. But, do not think that Taylor was the only mathematician working in this issue. Also, Newton, Leibniz, Bernouilli and Moivre discovered variants of Taylor's theorem. The importance of this theorem, which is collected in this work , was unknown until 1772 when Lagrange explained the basic principles of differential calculus.

Taylor's formula (Brook Taylor, 1715) is one of the most important results of mathematical analysis and it has a lot of applications. Its origin is linked to problems of great application to science as maximum and minimum problems and approximation of functions.

However, if the function does not have "good behaviour", it cannot be approximated by polynomials. It's necessary that f is continuous function and derivable repeatedly.

On the other hand, the idea of Fourier Analysis is very similar but, now we consider the approximation of a function by combinations of sine and cosine function. The representation of an arbitrary function by trigonometric serie was studied by some researches in the late eighteenth and early nineteenth century. One of them was the French mathematician Jean Baptiste Joseph Fourier (1768, Auxerre, Francia-1830, París) who showed that any function admits a representation in trigonometric series.
In his work Fourier begins deducting the equation which govern the dissemination heat. Afterwards, he solved the problem of the distribution of temperature from distribution at the inicial time. For it Fourier invents the method of separation of variables, also known as

Fourier method. To write the solution, one needs to write the inicial function as sum of trigonometric series. This is the aspect of the work of Fourier that we are going to try.

Once raised the issue of the representation of function by series trigonometric, attempts to prove the convergence of the Fourier series appeared immediately. Poisson and Cauchy published incorrect tests about this. In 1829, Dirichlet published the first correct result on convergence: if a bounded function is continuous and monotone pieces, then its Fourier series converge, at each point, to the half of the sum of the lateral limits.
After of this, the most important contribution of the theory of Fourier series was in 1854 when Riemann constructed a function with an infinite number of discontinuities. Also, he studied the possibility of representing this function by Fourier series.

During the rest of the nineteenth century more general conditions for convergence of Fourier series are obtained. Some recent results about this are cited in this work and we make a special emphasis on criterion of Dini.

In the general case, a function of period 2π, the problem is, given a function f, to find a trigonometric series whose sum matches with $f(x)$ for each x. Dini criterion holds that if $(f(x+c)-f(x))/c$ is integrable around zero, then the Fourier series of the function f converges puntually to $f(x)$.

As well, in this work we propose to take a comparative study of Taylor series and Fourier series. First of all, we focus on Taylor and we do a tour of the historycal and mathematical context and we describe how Taylor deduced the famous formula. In relation to this, we have to say that the notation used by Taylor, based on "points", subscripts and superscripts, was very complicated. In another section of the chapter we describe and demostrate some fundamental results on convergence of Taylor series.

In the second part, we approach different aspects of Fourier series. We start with a brief history about how to resolve the problem of representation in trigonometric series of a function. Later, we discuss

the convergence of this series. In this part, we present the framework for the Fourier series and we establish criteria for uniform convergence and criteria for pointwise convergence of such series. Also, examples of application of this results are collected in order to give practical approach.

In the last part of this paper we have tried to estabish a comparative study between Taylor series and Fourier series. This is focused on highlighting similarities and differences between aspects like origin, convergence and applications of these series.

Referencias

[1] J. Alaminos Prats. *Apuntes de Cálculo*. http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Calculo_una_varias_variables.pdf

[2] C. Aparicio del Prado. http://www.ugr.es/~camilo/calculo-ii-grado-en-matemat/apuntes/tema-9.pdf

[3] C. Aparicio del Prado, R. Payá Albert. *Análisis Matemático*. Universidad de Granada, 1986.

[4] T. M. Apostol. *Análisis Matemático*. Reverté, 1960.

[5] F. Bombal. *Los orígenes del Análisis Funcional.* Historia de la Matemática en el Siglo XIX. Real Academia e Ciencias de Madrid (1994), 35-56. http://www.mat.ucm.es/~bombal/AF/origenaf.pdf

[6] A. Cañada Villar. *Brook Taylor, tercer centenario de su nacimiento*. Epsilon, 4, 1985, 104-111.

[7] A. Cañada Villar. *Fourier y sus coeficientes*. Bol. Soc. Esp. Mat. Apl., 36, 2006, 125-148.

[8] A. Cañada Villar. *Series de Fourier y Aplicaciones. Un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos*. Ediciones Pirámide, Madrid, 2002.

[9] A. Cañada Villar. *Series de Fourier: una relación fraternal entre el Análisis Matemático y la Física.* Conferencia, Granada, 2009. http://www.ugr.es/~acanada/excursiones/amat2011sinpausa.pdf

[10] A. Cañada Villar. *Una perspectiva histórica de las series de Fourier*. Seminario de Historia de la Matemática, Universidad de Granada, 2004. http://www.ugr.es/~dpto_am/docencia/Apuntes/Historia_series_Fourier_Canada.pdf

[11] O. Cortadellas Izquierdo. *Una pequeña novela histórica sobre Series de Taylor y de Fourier o diálogos de dos estudiantes en Gotinga*. Seminario de Historia de la matemática, Universidad de Granada, 2004-2005. http://www.ugr.es/~acanada/excursiones/Taylor_Fourier.pdf

[12] R. Courant y F. John. *Introduction to Calculus and Analysis*. Interscience Publishers, 1965.

[13] J. Duoandikoetxea. *200 años de convergencia de las Series de Fourier.* La Gaceta de la RSME, 10, Nº 3, 2007, 651-688.

[14] J.U. Fierros Bobadilla, H. Rivera Martínez. *Análisis de la convergencia de las Series de Fourier.* Universidad de Sonora, 1996. http://lic.mat.uson.mx/tesis/93.94TesisMere_Fierros.PDF

[15] G. Gómez Grisales. ABCmatemático, [BlogInternet], 2009.

[16] M. Kline. *Mathematical thought ancient to modern times*. Oxford University Press, 1972. Versión española en Alianza editorial, S.A., 1992.

[17] A. Ortiz Melguizo. *Estudio sobre Joseph Fourier.* Universidad Autónoma de Madrid, 2006. http://www.uam.es/personal_pdi/ciencias/barcelo/historia/Estudio%20sobre%20Joseph%20Fourier.pdf

[18] F.J. Pérez González. *Cálculo Diferencial e Integral de funciones de una variable*. http://www.ugr.es/~fjperez/textos/calculo_diferencial_integral_func_una_var.pdf

[19] http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/index.html

[20] http://mat.uson.mx/eduardo/calculo2/soltaylor/soltaylorHTML/taylor.htm

[21] http://matap.uma.es/~jjsaame/vca2006-07_archivos/restema11.pdf