LEY DE GAUSS (Lehmann, 124)

Sea $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(x_0;\delta)$, $S = \partial\Omega$, $r : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$(x,y,z) \to (x,y,z)$

Pruébese que

$$\int_S \frac{r \cdot n}{|r|^3}\, dS = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin \bar{\Omega} \\ 4\pi & \text{si } 0 \in \Omega \end{cases}$$

NOTA $|r| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$

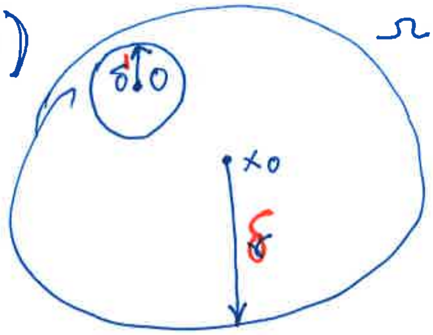
$$\int_S \frac{r \cdot n}{|r|^3}\, dS = \int_S \frac{r}{|r|^3} \cdot dS$$: "flujo del ~~campo vectorial~~ F definido en $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ $\frac{r}{|r|^3}$ a través de $\partial\Omega$"

A) $0 \notin \bar{\Omega} \Rightarrow \displaystyle\int_S \frac{r}{|r|^3} \cdot dS = \int_\Omega \underbrace{\operatorname{div} \frac{r}{|r|^3}}_{0\ (\forall r \neq 0)} dx\,dy\,dz = 0.$

$\Downarrow$

$F \in C^1(U)$, U ab. $U \supset \bar{\Omega}$

B)



Tomamos $\delta' > 0 \;/\; \bar{B}_{\mathbb{R}^3}(0;\delta') \subset \Omega$

Aplicamos el T. Divergencia a $\Omega_1 \equiv \Omega \setminus \bar{B}(0;\delta')$

$\partial\Omega_1 = S \cup C(0;\delta')$, donde $C(0;\delta') = \{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = \delta'\}$

Entonces

$$\underbrace{\int_{\Omega_1} \operatorname{div} \frac{r}{|r|^3}}_{0} = \int_{\partial\Omega_1 \equiv S_1} \frac{r}{|r|^3} \cdot dS_1 = \int_S \frac{r}{|r|^3} \cdot dS + \int_{S_2 \equiv C(0;\delta')} \frac{r}{|r|^3} \cdot dS_2$$

$$\Rightarrow \int_S \frac{r}{|r|^3} \cdot dS = -\int_{S_2 = C(0;\delta')} \frac{r}{|r|^3} \cdot dS_2$$

S_2 $\Phi(\theta,\varphi)$ $\begin{cases} x = \delta' \operatorname{sen}\theta \cos\varphi \\ y = \delta' \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi \\ z = \delta' \cos\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{cases}$

$$-\int_{S_2} \frac{r}{|r|^3}\cdot dS_2 = \frac{-1}{\delta'^3}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle (\delta'\sin\theta\cos\varphi, \delta'\sin\theta\sin\varphi, \delta'\cos\theta), \Phi_\theta\times\Phi_\varphi\rangle \, d\varphi\, d\theta$$

$$\Phi_\theta = (\delta'\cos\theta\cos\varphi, \delta'\cos\theta\sin\varphi, -\delta'\sin\theta)$$

$$\Phi_\varphi = (-\delta'\sin\theta\sin\varphi, \delta'\sin\theta\cos\varphi, 0)$$

$$\Phi_\theta\times\Phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \delta'\cos\theta\cos\varphi & \delta'\cos\theta\sin\varphi & -\delta'\sin\theta \\ -\delta'\sin\theta\sin\varphi & \delta'\sin\theta\cos\varphi & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \Big(\delta'^2\sin^2\theta\cos\varphi, \delta'^2\sin^2\theta\sin\varphi, \underbrace{\delta'^2\cos^2\varphi\sin\theta\cos\theta + \delta'^2\sin^2\varphi\sin\theta\cos\theta}_{\delta'^2\sin\theta\cos\theta}\Big)$$

$$= \underbrace{\delta'^2\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)}_{\text{Normal interior.}}$$

Luego

$$-\int_{S_2}\frac{r}{|r|^3}\cdot dS_2 = +\frac{1}{\delta'^3}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}(\delta'^3\sin^3\theta\cos^2\varphi + \delta'^3\sin^3\theta\sin^2\varphi + \delta'^3\sin\theta\cos^2\theta)$$

$$= \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\underbrace{(\sin^3\theta + \sin\theta\cos^2\theta)} = \int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\theta\, d\varphi\, d\theta =$$

$$= 2\pi\left(-\cos\theta\right]_0^{\pi} = 2\pi(1+1) = 4\pi, \quad \underline{\underline{\text{c.q.d.}}}$$

NOTA IMPORTANTE En lugar de $\Omega = B_{\mathbb{R}^3}(x_0;\delta)$ podemos tomar cualquier Ω ab. conexo y acotado donde sea válido el T. Divergencia.

Interpretación física de la ley de Gauss
(Lang, 351–352 versión moderna)

CAMPO ELÉCTRICO (ELECTROSTÁTICA)

$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$(x,y,z) \longrightarrow \frac{q}{4\pi|r|}, \quad |r| = (x^2+y^2+z^2)^{1/2}$$

$r = (x,y,z)$

$$-\nabla f(x,y,z) = \frac{q r}{4\pi|r|^3} \cancel{(x,y,z)}$$

Campo eléctrico originado por una carga puntual q en el origen

En efecto,

$$f_x = \frac{-q}{4\pi} \cdot \frac{\frac{1}{\cancel{2}}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} \cdot \cancel{2}x}{|r|^2} = \frac{-q}{4\pi} \frac{x}{|r|\,|r|^2} = \frac{-q}{4\pi|r|^3} x$$

f: "energía potencial asociada con una carga puntual q en el origen"

$-\nabla f(x,y,z)$: correspondiente campo eléctrico.

$\frac{q}{4\pi} \frac{r}{|r|^3}$

Trivial que

$$\mathrm{div}(-\nabla f(x,y,z)) = 0.$$

La ley de Gauss dice:

En este caso

$$\int_S \frac{q}{4\pi} \frac{r}{|r|^3} \cdot n \, dS = q \text{ si } 0 \in \Omega$$

no

El flujo saliente del campo eléctrico es igual a la carga puntual de electricidad.

CAMPO GRAVITACIONAL

NOTA (Stewart, pg. 874: Campo gravitacional

Objeto con masa M en el origen de $\mathbb{R}^3$

" " " m en $\underbrace{(x,y,z)}_{=\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$

La fuerza gravitacional ejercida sobre este 2º objeto es $\cancel{\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}}$

$$F(\mathbf{x}) = -\frac{mMG}{\|x\|^3} \mathbf{x}$$

Tendríamos así la ley de Gauss para un campo gravitacional.