ANÁLISIS VECTORIAL, 16/ENERO/2020
Examen para matrícula de honor

1. **(3 puntos)** Encuéntrese (razonadamente) algún campo vectorial $F \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ tal que

$$\text{div } F(x) = 2x_1 + x_2 - 1, \quad \text{rot } F(x) = (0,0,1), \quad \forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

¿Es único dicho campo?

2. Sea C la curva (cerrada y simple) dada por

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x + z = 3\}$$

y $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial

$$F(x,y,z) = (y,z,x),\ \forall\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

(a) **(3 puntos)** Calcúlese $\int_C F \cdot dC$

(b) **(4 puntos)** Defínase alguna superficie S tal que al par (S, C) y al campo F se le pueda aplicar el Teorema de Stokes y calcúlese $\int_S rot\ F \cdot dS$, comprobando que el resultado es el mismo que el de la integral de línea anterior.
¿Es única dicha superficie S?

16/11/2020 M. Honor. A. [illegible] 1

1. $F:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $F(x_1,x_2,x_3) = \left(x_1^2 + ax_2 + bx_3, \frac{1}{2}x_2^2 + (1+a)x_1 + d\,x_3, -x_3 + b\,x_1 + d\,x_2\right)$

$\operatorname{div} F(x) = 2x_1 + x_2 - 1$

$$\operatorname{rot} F(x) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (d - d, -b + b, (1+a) - a) = (0,0,1)$$

2. $$C \begin{cases} x^2+y^2+(3-x)^2 = 9 \\ x+z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2x^2+y^2-6x = 0 \\ x+z = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+\frac{y^2}{2}-3x = 0 \\ x+z = 3 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{y^2}{2} = \frac{9}{4} \\ x+z = 3 \end{array}$$

$$\frac{y^2}{2} : \frac{9}{4} = \frac{4y^2}{2\cdot 9} = \frac{2y^2}{9} = \frac{y^2}{9/2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{9/4} + \frac{y^2}{9/2} = 1 \\ x+z = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1 \\ x+z = 3 \end{array}\right\}$$

$$C \begin{cases} x = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos t \\ y = \frac{3}{\sqrt{2}}\sin t \\ z = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos t \end{cases} \qquad C' \begin{cases} x' = -\frac{3}{2}\sin t \\ y' = \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t \\ z' = \frac{3}{2}\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

$$\int_C F\cdot dC = \int_0^{2\pi} \left\langle \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\sin t, \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\cos t, \frac{3}{2} + \frac{3}{2}\cos t\right), \left(-\frac{3}{2}\sin t, \frac{3}{\sqrt{2}}\cos t, \frac{3}{2}\sin t\right) \right\rangle dt$$

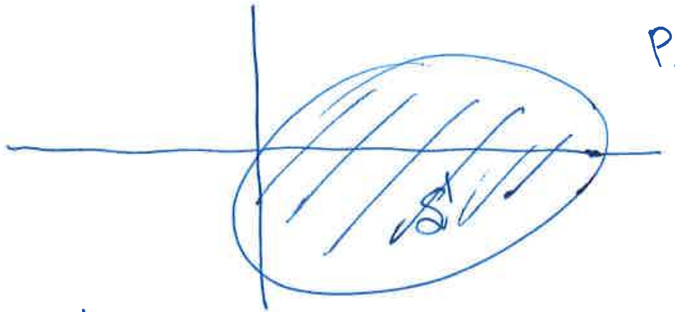
$$= \int_0^{2\pi} -\frac{9}{2\sqrt{2}}\sin^2 t + \underbrace{\frac{9}{2\sqrt{2}}\cos t}_{0} - \frac{9}{2\sqrt{2}}\cos^2 t + \underbrace{\frac{9}{4}\sin t}_{0} + \underbrace{\frac{9}{4}\sin t\cos t}_{0} = -\frac{9}{2\sqrt{2}}\cdot\pi\cdot 2 = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}$$

16/11/2020 M. Honor A. Cañada

(2)

Hay diferentes posibilidades para S', pero quizás lo mejor sea una superficie plana, pues C está contenida en el plano $x+z=3$ y C es la elipse

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(x-\frac{3}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2}+\dfrac{y^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}=1\\[2ex] x+z=3\end{array}\right\}$$



Plano $x+z=3$

$$S'=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{(x-\frac{3}{2})^2}{(\frac{3}{2})^2}+\frac{y^2}{(\frac{3}{\sqrt{2}})^2}\leq 1,\ x+z=3\right\}$$

$$S'\left|\begin{array}{ll} x=\frac{3}{2}+r\frac{3}{2}\cos t & 0\leq r\leq 1\\ y=r\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t & 0\leq t\leq 2\pi\\ z=\frac{3}{2}-r\frac{3}{2}\cos t & \end{array}\right.$$

$\Phi(r,t)$

$$\Phi_r=\left(\frac{3}{2}\cos t,\ \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,\ -\frac{3}{2}\cos t\right) \qquad \Phi_t=\left(-r\frac{3}{2}\operatorname{sen} t,\ r\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t,\ r\frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)$$

$$\Phi_r\times\Phi_t=\begin{vmatrix} i & j & k\\ \frac{3}{2}\cos t & \frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t & -\frac{3}{2}\cos t\\ -r\frac{3}{2}\operatorname{sen} t & r\frac{3}{\sqrt{2}}\cos t & r\frac{3}{2}\operatorname{sen} t\end{vmatrix}=\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}r\operatorname{sen}^2 t+\frac{9}{2\sqrt{2}}r\cos^2 t,\ -\frac{9}{4}r\cos t\operatorname{sen} t+\frac{9}{4}r\operatorname{sen} t\cos t,\ \frac{9}{2\sqrt{2}}r\cos^2 t+\frac{9}{2\sqrt{2}}r\operatorname{sen}^2 t\right)=\left(\frac{9}{2\sqrt{2}}r,\ 0,\ \frac{9}{2\sqrt{2}}r\right)$$

16/11/2020 M. Home A. Cascade

$$\operatorname{rot} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

Así

$$\int_S \operatorname{rot} F \cdot dS = \frac{9}{2\sqrt{2}} \int_{r=0}^{1} \int_{t=0}^{2\pi} \langle (-1,-1,-1), \underbrace{(r,0,r)}_{\Phi_r \times \Phi_t} \rangle \, dt\, dr =$$

$$= \frac{9}{2\sqrt{2}}(-2) \int_{r=0}^{1} \int_{t=0}^{2\pi} r \, dt\, dr = -\frac{9}{\sqrt{2}} \left.\frac{1}{2} r^2\right]_0^1 \cdot 2\pi = -\frac{9\pi}{\sqrt{2}}$$

Puede hacerse también la parametrización de S' en coordenadas euclídeas