ANÁLISIS VECTORIAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
Convocatoria ordinaria del primer semestre, 20/01/2020

1. (a) **(1+1 punto)** Enúnciense el Teorema de Green y el Teorema de la divergencia en dimensión dos (versión curva de Jordan), explicando brevemente, pero con precisión, los diferentes términos que aparecen en el mismo.

   (b) **(2+2 puntos)** Verifíquense los dos Teoremas del apartado anterior para la elipse $x^2 + 4y^2 = 9$ y el campo vectorial $F : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, definido como $F(x, y) = (2x + y, 2x - 3y)$.

2. (a) **(1 punto)** Enúnciese el Teorema de Stokes, explicando brevemente, pero con precisión los diferentes términos que aparecen en el mismo.

   (b) **(1.5+1.5 puntos)** Verifíquese el Teorema anterior para el campo vectorial

$$F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3,\ (x, y, z) \to (2x - y, 2y - 2x, y + z)$$

   y la superficie S definida como

$$S = \{(x, y, z) \in \mathrm{R}^3 : x^2 + y^2 - 6y + z^2 = 7,\ z \geq 0\}$$

20/1/2020 A. Cañada

(1)

1. a) Teoría

1. b) $x^2+4y^2=9$ $\quad F(x,y)=(2x+y,2x-3y)$

b.1) T. Green

$$\int_{(\partial D)^+}(P\,dx+Q\,dy)=\int_D(Q_x-P_y)\,dx\,dy$$

$$x^2+4y^2=9 \iff \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1 \iff \frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$$

$$\int_D(Q_x-P_y)=\int_D(2-1)=\text{área}(D)=\pi\cdot 3\cdot\frac{3}{2}=\frac{9\pi}{2}$$

$x=3\cos t$
$y=\frac{3}{2}\operatorname{sen} t$ $\quad 0\le t\le 2\pi$

$$\int_{(\partial D)^+}(P\,dx+Q\,dy)=\int_0^{2\pi}\left[\left(6\cos t+\frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)(-3\operatorname{sen} t)+\left(6\cos t-\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\right)\left(\frac{3}{2}\cos t\right)\right]$$

$$=-\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot 2\pi+\frac{18}{2}\,\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\frac{-18\pi}{4}+\frac{36\pi}{4}=\frac{18\pi}{4}=\frac{9\pi}{2}$$

b.2) T. Divergencia

$$\int_{(\partial D)^+}(-Q\,dx+P\,dy)=\int_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)dx\,dy=\int_D(2-3)=-\pi\cdot 3\cdot\frac{3}{2}=-\frac{9\pi}{2}$$

$$\int_{(\partial D)^+}(-Q\,dx+P\,dy)=\int_0^{2\pi}\left[\left(-6\cos t+\frac{9}{2}\operatorname{sen} t\right)(-3\operatorname{sen} t)+\left(6\cos t+\frac{3}{2}\operatorname{sen} t\right)\left(\frac{3}{2}\cos t\right)\right]$$

$$=-\frac{27}{2}\,\frac{1}{2}2\pi+\frac{18}{2}\,\frac{1}{2}\cdot 2\pi=-\frac{54\pi}{4}+\frac{36\pi}{4}=-\frac{18\pi}{4}=\frac{-9\pi}{2}$$

20/11/2020 A. Cañada

2. a) $\int_C F\cdot dC = \int_S \mathrm{rot}F\cdot dS$

$F(x,y,z) = (2x - y,\ 2y - 2x,\ y+z)$

$S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+(y-3)^2+z^2 = 16,\ z\geq 0\}$

$C = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ x^2+(y-3)^2 = 16,\ z = 0\}$

$C\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 3+4\,\mathrm{sen}\,t \\ z = 0\end{cases} \qquad 0\leq t\leq 2\pi$

$$\int_C F\cdot dC = \int_0^{2\pi} \langle (8\cos t - 3 - 4\,\mathrm{sen}\,t,\ 6+8\,\mathrm{sen}\,t - 8\cos t,\ 3+4\,\mathrm{sen}\,t),\ (-4\,\mathrm{sen}\,t,\ 4\cos t,\ 0)\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} [16\,\mathrm{sen}^2 t - 32\cos^2 t] = 16\cdot\frac{1}{2}2\pi - 32\cdot\frac{1}{2}2\pi = -16\pi$$

$$\mathrm{rot}F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & 2y-2x & y+z\end{vmatrix} = (1-0,\ 0-0,\ -2+1) = (1,0,-1)$$

$S\ \underbrace{\begin{cases} x = 0+4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi \\ y = 3+4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi \\ z = 0+4\cos\theta\end{cases}}_{\Phi(\theta,\varphi)} \qquad \begin{matrix}\theta\in[0,\pi/2] \\ \varphi\in[0,2\pi]\end{matrix} \qquad J = 16\,\mathrm{sen}\,\theta$

$\Phi_\theta = (4\cos\theta\cos\varphi,\ 4\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ -4\,\mathrm{sen}\,\theta)$, $\Phi_\varphi = (-4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi,\ 0)$

$$\Phi_\theta\times\Phi_\varphi = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 4\cos\theta\cos\varphi & 4\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & -4\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -4\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi & 4\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix} = (+16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\varphi,\ 16\,\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}\,\varphi,\ \underbrace{16\cos^2\varphi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta + 16\,\mathrm{sen}^2\varphi\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta}_{16\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta})$$

$$\int_S \mathrm{rot}F\cdot dS = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle (1,0,-1),\ \Phi_\theta\times\Phi_\varphi\rangle\, d\varphi\, d\theta = \int_{\theta=0}^{\pi/2}\int_{\varphi=0}^{2\pi} (16\,\mathrm{sen}^2\theta\cos\varphi - 16\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= -8\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \mathrm{sen}\,2\theta = -8\cdot 2\pi\cdot\left[-\frac{\cos 2\theta}{2}\right]_0^{\pi/2} = -16\pi\cdot[1+1]\frac{1}{2} = -16\pi$$