ANÁLISIS VECTORIAL, 30/OCTUBRE/2019

1. **(3 puntos)** Si $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ es C^1 e irrotacional, pruébese que si (x_0, y_0, z_0) es un punto de R^3 fijo, entonces la función $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, definida como

$$f(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} F_1(t,y,z)\ dt + \int_{y_0}^{y} F_2(x_0,t,z)\ dt + \int_{z_0}^{z} F_3(x_0,y_0,t)\ dt$$

   es una función potencial para F.

   (*Proporciónese una breve aclaración del tipo de Teoremas que se usan en la derivación de los sumandos que definen* f)

2. **((3 puntos la integral de línea y 0.5 puntos la integral doble))** Verifíquese el Teorema de Green para el campo $F : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $(x,y) \to (x + 4y, 2x)$ y para el conjunto D definido como

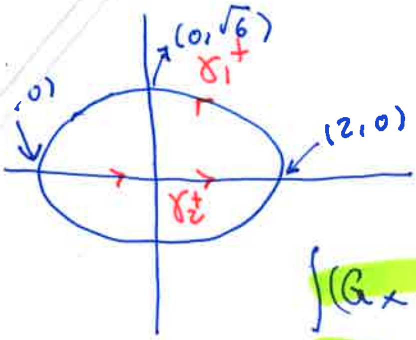
$$\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 < 12, y > 0\}$$

3. **(3 puntos la integral de línea y 0.5 puntos la integral doble)** Verifíquese el Teorema de la divergencia para el campo $F : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^2$, $(x,y) \to (1 + x + 4y, 2x)$ y para el conjunto D definido como

$$\{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : 3x^2 + 2y^2 < 12, x > 0\}$$

30/10/2019

①



$$\iint_D (Q_x - P_y)\,dx\,dy = \int_{(\partial D)^+} (P\,dx + Q\,dy)$$

$$\iint_D (Q_x - P_y) = \iint_D (2-4) = -2\,\text{Área}(D) = -2\,\frac{\pi \cdot \cancel{2}\sqrt{6}}{\cancel{2}} = -2\pi\sqrt{6}$$

$$\int_{(\partial D)^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{\gamma_1^+} (P\,dx + Q\,dy) + \int_{\gamma_2^+} (P\,dx + Q\,dy)$$

$$\int_{\gamma_1^+} (P\,dx + Q\,dy) \Bigg|\ \gamma_1^+ \quad \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = \sqrt{6}\,\operatorname{sen} t \end{array} \quad 0 \le t \le \pi$$

$$\| $$

$$\int_0^\pi [(2\cos t + 4\sqrt{6}\,\operatorname{sen} t)(-2\operatorname{sen} t) + 4\cos t\,(\sqrt{6}\cos t)]\,dt = \dots = -2\sqrt{6}\,\pi$$

$$\int_{\gamma_2^+} (P\,dx + Q\,dy) = \int_{-2}^{2} t\,dt = 0$$

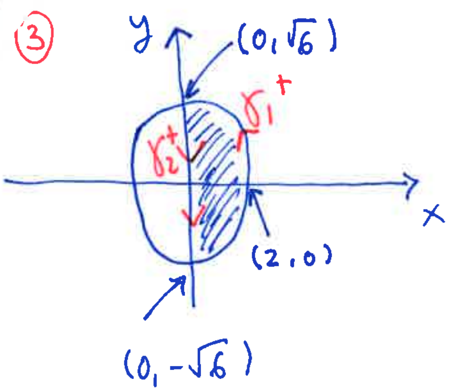
$$\gamma_2 \left| \begin{array}{l} x = t \\ y = 0 \end{array} \right. \quad -2 \le t \le 2$$

Así

$$\int_{(\partial D)^+} (P\,dx + Q\,dy) = -2\sqrt{6}\,\pi$$

30/10/2019

3



$$\int_D (P_x + Q_y)\,dx\,dy = \int_{(\partial D)^+} (P\,dy - Q\,dx) =$$

$$= \int_{\gamma_1^+} (P\,dy - Q\,dx) + \int_{\gamma_2^+} (P\,dy - Q\,dx)$$

$$(\partial D)^+ = \gamma_1^+ \oplus \gamma_2^+$$

$$\gamma_1^+ \left| \begin{array}{l} x = 2\cos t \\ y = \sqrt6 \,\mathrm{sen}\, t \end{array} \right. \quad -\pi/2 \le t \le \pi/2 \qquad (\gamma_2^+)^{op} \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = t \end{array} \right. \quad -\sqrt6 \le t \le \sqrt6$$

Portanto,

$$\int_{\gamma_1^+} (P\,dy - Q\,dx) + \int_{\gamma_2^+} (P\,dy - Q\,dx) = \int_{\gamma_1^+} (P\,dy - Q\,dx) - \int_{(\gamma_2^+)^{op}} (P\,dy - Q\,dx)$$

$$\int_{\gamma_1^+} (P\,dy - Q\,dx) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} [(1 + 2\cos t + 4\sqrt6 \,\mathrm{sen}\, t)(\sqrt6 \cos t) - 4\cos t\,(-2\,\mathrm{sen}\, t)]\,dt$$

$$= \dots = 2\sqrt6 + \pi\sqrt6$$

$$\int_{(\gamma_2^+)^{op}} (P\,dy - Q\,dx) = \int_{-\sqrt6}^{\sqrt6} (1 + 4t)\,dt = 2\sqrt6 \Rightarrow \int_{\gamma_2^+} (P\,dy - Q\,dx) = -2\sqrt6$$

Assim $\displaystyle\int_{(\partial D)^+} (P\,dy - Q\,dx) = \cancel{2\sqrt6} + \pi\sqrt6 - \cancel{2\sqrt6} = \pi\sqrt6$

Trivialmente,

$$\int_D (P_x + Q_y)\,dx\,dy = \int_D 1 = \frac{1}{\cancel{2}}\pi \cdot \cancel{2}\sqrt6 = \pi\sqrt6$$