ANÁLISIS VECTORIAL, 19/DICIEMBRE/2019

1. **(4 puntos)** Si

$$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : -1 < x < 1,\ 0 < z < 1 - x^2,\ 0 < y < 2 - z\}$$

y S es la frontera topológica de Ω, orientada según la normal exterior, calcúlese

$$\int_S F \cdot dS$$

donde $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ está dado por $F(x,y,z) = (xy, y^2 + e^{xz^2}, \mathrm{sen}(xy))$.

2. **(4 puntos)** Sea

$$S = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 4,\ x \geq 1\}$$

y C la curva en el espacio dada por

$$C = \{(x,y,z) \in \mathrm{R}^3 : x = 1,\ 2y^2 + 3z^2 = 3\}$$

Si $F : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}^3$ está dado por

$$F(x,y,z) = (ye^z, xe^z, xye^z)$$

calcúlese

$$\int_C F \cdot dC$$

3. Sea S una superficie con borde C y $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, $g : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$, campos escalares de clase $C^2(\mathrm{R}^3)$. Pruébese que

   (a) **(1 punto)**

$$\int_C (f\nabla g) \cdot dC = \int_S [(\nabla f) \times (\nabla g)] \cdot dS$$

   (b) **(1 punto)**

$$\int_C (f\nabla g + g\nabla f) \cdot dC = 0$$

19/12/2019 Soluciones

1. Por el T. Divergencia

$$\int_{\partial\Omega = S} F \cdot dS = \int_{\Omega} \operatorname{div} F(x,y,z)$$

Por tanto,

$$\int_S F \cdot dS = \int_{\Omega} 3y = 3\int_{x=-1}^{x=1}\int_{z=0}^{z=1-x^2}\int_{y=0}^{y=2-z} y \, dy \, dz \, dx =$$

$$= \cdots = \frac{184}{35}$$

2. Por el T. Stokes

$$\int_C F \cdot dC = \int_S (\operatorname{rot} F) \cdot dS$$

Ahora bien,

$$(\operatorname{rot} F)(x,y,z) = (0,0,0)$$

Luego $\displaystyle\int_C F \cdot dC = 0$

3. a) Por el T. Stokes,

$$\int_C (f \nabla g) \cdot dC = \int_S \operatorname{rot}(f \nabla g) \cdot dS$$

Trivialmente se comprueba que

$$\operatorname{rot}(f \nabla g)(x,y,z) = (\nabla f \times \nabla g)(x,y,z)$$

b) Por el apartado anterior,

$$\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot dC = \int_S [((\nabla f \times \nabla g) + (\nabla g \times \nabla f))] \cdot dC$$

$$= 0$$