

NOTAS DOCENTES

ANÁLISIS FUNCIONAL

DOBLE GRADO I. INFORM. y MATEMÁTICAS

CURSOS 2021/22, 2022/23

*A. Cañada*

*Antonio Cañada Villar*

# ÍNDICE

Espacios vectoriales de dimensión infinita	3
Espacios normados. Ejemplos	15
Topología de espacios normados	25
Operadores lineales	44
Teorema de Hahn-Banach	58
Espacios de Hilbert (un primer encuentro)	68
Igualdad del Paralelogramo	76
Teorema de la Proyección ortogonal}	
Dual de un espacio de Hilbert	82
Lema de Baire. Aplicaciones	102
Bibliografía	107

**NOTA IMPORTANTE :** Estas "notas docentes" no deben ser consideradas como unos apuntes de la asignatura. Son, simplemente, las que he utado en clase. Considero que pueden ser útiles para los estudiantes, debido a su brevedad, aunque considero que las ideas fundamentales están presentes.

- A. Cádiz E. VECTORIALES DE DIMENSIÓN INFINITA Septiembre 2022
1. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión  $n$ ?
  2. Dado un número natural  $n \in \mathbb{N}$ , ¿existen espacios vectoriales de dimensión  $n$ ?
  3. ¿Qué significa que un espacio vectorial tenga dimensión infinita?
  4. ¿Existen espacios vectoriales de dimensión infinita?
  5. ¿Cuál es el concepto de base de un e.v.?
  6. ¿Qué relación tiene el concepto de base con la dimensión de un e.v.?
  7. Dado un espacio vectorial, ¿existe siempre alguna base?
  8. Dados 2 e.v. sobre un mismo cuerpo  $K$  (en adelante suponemos que  $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$ ),  $V$  y  $W$ , decimos que  $V$  y  $W$  son isomorfos si existe alguna aplicación  $T: V \rightarrow W$ ,  $T$  biyectiva y lineal.  
Si la dimensión de  $V(K)$  es  $n$ , es trivial probar que  $V$  es isomorfo a  $K^n$ . Ahora bien, el tema se puede complicar si hablamos de dimensiones infinitas, ya que "no todos los infinitos son iguales" (éste es un tema muy bonito, del que hablaremos en otra ocasión).  
Por ejemplo, si  $\mathcal{X}_0 = \text{Car}(\mathbb{N})$ ,  $\mathcal{X}_1 = \text{Car}(\mathbb{R})$ , entonces  $\mathcal{X}_0 < \mathcal{X}_1$

Por cierto, ¿sabes la respuesta a la siguiente cuestión?

(a) ¿ $\exists A : \forall x \in A \subset \mathbb{R}, x_0 < \text{card}(A) < x_1$ ?

¡Buena suerte! Mejor investigando la respuesta!

Ejercicio 1. (A) Sea  $V(K)$  un e.v. de dimensión finita y  $L: V \rightarrow V$ , lineal. Entonces son equivalentes:

- a)  $L$  es inyectiva.
- b)  $L$  es sobreyectiva.
- c)  $L$  es biyectiva.

(B) Sea  $L: (C[0,1], \mathbb{R}) \longrightarrow (C[0,1], \mathbb{R})$ ,

$$(Lf)(t) = \int_0^t f(s) ds, \quad \forall f \in (C[0,1], \mathbb{R}) \\ \forall t \in [0,1]$$

¡Prueba que  $L$  es inyectiva, pero no sobreyectiva!

¡Buena suerte obteniendo tus propias conclusiones!

9. Comentamos con la observación 7.

Se puede demostrar, con la ayuda del LEMA DE ZORN, que todo espacio vectorial admite al menos base. Evidentemente, estamos hablando de BASE ALGEBRAICA o

BASE DE HAMEL. Pero la casuística puede sorprender, como podemos ver con los ejemplos siguientes:

EJEMPLO 1.  $V = \mathbb{Q}(\mathbb{R})$ , conjunto de los polinomios reales. Es claro que  $V$  es un e.v. real <sup>con las operaciones usuales.</sup> y  $\mathcal{B}$  una base de  $V$  es  $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \dots, x^n, \dots\}$

Así pues,  $V$  es un e.v. real, de dimensión infinita, con base numerable.

EJEMPLO 2.  $V = C([0,1], \mathbb{R})$ , conjunto de funciones continuas, definidas en  $[0,1]$  y con valores reales.

Es claro que  $V$  es un e.v. real <sup>con las operaciones usuales</sup>, pero demostraremos este resultado, con ayuda del TEOREMA DE LA CATEGORÍA DE BAIRE, que cualquier base de  $V$  es no numerable (¡que barbaridad!). Así si  $\mathcal{B} = \{v_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$  es cualquier base de  $V$ ,  $\Lambda$  es infinito no numerable, o sea que olvidaros de poder escribir  $\Lambda = \{v_1, v_2, v_3, \dots\}$ , ya que si fuese así,  $\Lambda$  sería numerable.

EJEMPLO 3.  $V = \mathbb{R}^\infty$ , conjunto de las sucesiones de  $\mathbb{R}$  reales,  $\mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, x_3, \dots) : x_i \in \mathbb{R}, \forall i \in \mathbb{N}\}$

Es claro que  $V$  es un e.v. real con las operaciones usuales. ¿Cómo podemos probar que la dimensión de  $\mathbb{R}^\infty$  es infinita? Algunos dirán: encontrando alguna base infinita. ¡Intentadlo, y que haya suerte! Yo prefiero el camino siguiente: el conjunto

$$C_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$$

$$e_1 = (0, 1, 0, 0, \dots)$$

$$e_2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$

:

$$e_n = (0, \dots, 0, \overset{n}{1}, 0, 0, \dots), n \in \mathbb{N}$$

es un conjunto linealmente independiente. Esto prueba que  $\dim V$  es infinita (¿Por qué?) ¿Es el conjunto anterior una base de  $V$ ? Evidentemente (¿?) NO.

¡Reflexiona un poco y verás que lo realizado en este ejemplo nos indica un camino para probar que un e.v. tiene dimensión infinita, sin necesidad de encontrar una base. (¿Serás capaz de materializar esta idea?)

EJEMPLO 4.  $V = \mathbb{R}(\mathbb{Q})$ : conjunto de los números reales, como e.v. sobre el cuerpo  $\mathbb{Q}$ , con las operaciones usuales.

Si  $H = \{d_n, n \in \mathbb{N}\}$  es cualquier subconjunto de  $V$ , linealmente independiente, el conjunto de las combinaciones lineales de  $H$  es numerable (ya que  $\mathbb{Q}$  es numerable).

Como  $\mathbb{R}$  no es numerable (hecho probado por Cantor alrededor de 1871), obtenemos una contradic-

diáñ: Cualquier base de  $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$  es no numerable.

Por cierto, atrévete a dar ejemplos de subconjuntos como  $H$  (l.inkp. e infinitos) en  $\mathbb{R}(\mathbb{Q})$ .

10. En e.v., con un producto escalar y dimensión infinita, introduciremos un concepto de base, diferente del de base algebraica o base de Hamel: el concepto de BASE HILBERTIANA (las BASES DE FOURIER son un buen ejemplo de ello).

11. El alumno puede practicar con los conceptos anteriores con los dos grupos de ejemplos que siguen, que tratan con ESPACIOS DE SUCESIONES Y ESPACIOS DE FUNCIONES, todos ellos e.v. de dimensión infinita, que aparecerán a menudo a lo largo del curso.

11.1  $\ell_p \subset [1, +\infty)$  definimos

$$\ell_p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Tomamos sucesiones de elementos de  $K$ ,  $K = \mathbb{R}$  ó  $K = \mathbb{C}$

¿Es  $\ell_p$  un espacio vectorial sobre  $K$ , respecto de la

suma usual de sucesiones y el producto usual de un elemento de  $K$  por una sucesión? ¡Anízalas la única

propiedad de espacio vectorial no evidente sea la que nos dice que la suma de 2 elementos de  $\ell_p$  pertenece a  $\ell_p$ .

Esto no es difícil:  $\forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , tenemos

$$|a_n + b_n|^p \leq (|a_n| + |b_n|)^p \leq (\max\{|a_n|, |b_n|\} + \max\{|a_n|, |b_n|\})^p$$

$$= 2^p (\max\{|a_n|, |b_n|\})^p \leq 2^p (|a_n|^p + |b_n|^p)$$

Por tanto, si  $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty$  y  $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n|^p < +\infty$ , tenemos que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n + b_n|^p < +\infty.$$

NOTA: Si  $1 < p < q < +\infty$ , entonces  $l_1 \subset l_p \subset l_q$

11.2 Se define  $l_\infty = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada}\}$

(Recordemos que  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es acotada  $\Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \in \mathbb{R}$ )

(a veces se escribe  $\sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < +\infty$ )

Aquí  $|a_n|$  significa módulo del  $n^{\circ}$  complejo  $a_n$   
(valor absoluto si  $a_n$  es real).

Trivialmente  $l_\infty$  es un e.v. sobre  $\mathbb{K}$  y  $l_p \subset l_\infty$ ,  $1 \leq p$

Ejercicio  
(Cuidado con las palabras "trivialmente", "evidentemente"  
o similares; son muy peligrosas en matemáticas)

11.3. Otros ejemplos de e.v. son

$C_00$ : sucesiones "caseras" ( $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C_00 \Leftrightarrow$   
todos sus términos, salvo un  $n^{\circ}$  finito, son nulos)

$C_0$ : sucesiones con límite cero

$C$ : sucesiones convergentes

Ejercicio

trivialmente:  $C_0 \subset C_0 \subset C \subset L_\infty$ ,  $C_0 \subset L_p \subset C_0$ .

II.4 Si  $1 \leq p < \infty$  y  $a, b \in \mathbb{R}$ , con  $a < b$ , definimos

$$L^p(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x \text{ es medible}, \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

dónde, desde ahora, todas las integrales que aparecen se entiendrán en el sentido de Lebesgue.

Recordemos que si  $x, y \in L^p(a,b)$ , entonces

$x = y \iff x(t) = y(t)$ , c.p.d. en  $[a,b]$  (en inglés  $x(t) = y(t)$ , a.e. en  $[a,b]$ )  $\iff \exists A \subset [a,b]: \mu(A) = 0, x(t) = y(t), \forall t \in [a,b] \setminus A$  (dónde  $\mu(A)$  es la medida de Lebesgue de  $A$ )

II.5  $L^\infty(a,b)$  se define como

$$L^\infty(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}, x \text{ medible}, \exists M > 0: |x(t)| \leq M, \text{ a.e. en } [a,b] \right\}$$

Recordemos que  $L_p \subset L_\infty$ ,  $\forall p \in [1, \infty)$

Ejercicio 2. Consulta la bibliografía recomendada (por ejemplo, el libro del Brezis) para establecer la relación entre  $L^p(a,b)$ ,  $L^q(a,b)$ ,  $L^\infty(a,b)$ ,  $1 \leq p < q$

II.6 Si  $m \in \mathbb{N}$ , definimos

$$C^m[a,b] = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R} : x, x', \dots, x^{(m)} \in C[a,b] \right\}$$

dónde  $x^{(m)}$  indica la derivada de orden  $m$  de  $x$ .

¡Por cierto, escibe de manera rigurosa C<sup>1</sup> [a,b]!  
Ejercicio

Para terminar, una foto de D. Hilbert y una  
frase suya muy significativa



"The infinite. No other question has ever moved  
so profoundly the spirit of man" (1.921)

## COMPLEMENTOS

1. Definición de espacio vectorial

$V$  sobre un cuerpo  $K$ .

Dos operaciones

$$+: V \times V \rightarrow V, (x, y) \rightarrow x + y$$

$$\cdot : K \times V \rightarrow V, (\alpha, x) \rightarrow \alpha \cdot x$$

$\forall x, y, z \in V, \forall \alpha, \beta \in K$ , se tiene:

① Asociativa para  $+$

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

②  $\exists$  elemento neutro para  $+$

$$\exists 0 \in V : x + 0 = x$$

③  $\exists$  elemento opuesto para  $+$

$$\forall x \in V, \exists -x \in V : x + (-x) = 0$$

④ Comunitativa para  $+$

$$x + y = y + x$$

⑤  $1 \cdot x = x$  (1 elem. unidad de  $K$ )

⑥ Pseudoasociativa

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \beta) x$$

(7) Distributiva de los escalares

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

(8) Distributiva de los vectores

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

## 2. CARDINALIDAD DE UN CONJUNTO

Dados dos conjuntos  $A, B$ , se dice que  $A$  y  $B$  poseen el mismo cardinal (o que son equivalentes en este ambiente) si  $\exists$  alguna aplicación biyectiva  $f: A \rightarrow B$ .

Si  $A$  y  $B$  son conjuntos finitos, entonces  $A$  y  $B$  son equivalentes si tienen el "mismo número de elementos". Así, "por convenio" si  $A$  y  $B$  son conjuntos infinitos equivalentes, decimos que  $A$  y  $B$  tienen el "mismo número de elementos".

Se denota  $\chi_0 = \text{Cardinal}(m) = \text{Car}(m)$ ,

$\chi_1 = \text{Car}(\mathbb{N})$ , etc.

Decimos que  $\text{Car}(A) < \text{Car}(B)$  si existe alguna aplicación inyectiva de  $A$  en  $B$ ,

que ninguna biyección.

Para cualquier conjunto A, se dice

$$\text{Car}(A) < \text{Car}(\mathcal{P}(A))$$

dónde  $\mathcal{P}(A)$  es el conjunto de "todos los subconjuntos de A" (conjunto de las partes de A)

### LEMMA DE ZORN

Sea A un conjunto "parcialmente ordenado"

(existe alguna relación de orden en A,  $\leq$ : reflexiva, antisimétrica, transitiva) l.q.

cuálquier  $B \subset A$ , B "totalmente ordenado"

( $\forall x, y \in B$ , ó  $x \leq y$  ó  $y \leq x$ ), admite alguna cota superior ( $\exists x_0 \in A / x \leq x_0, \forall x \in A$ )

Entonces A tiene algún elemento maximal:

$\exists y \in A : \nexists x \in A$  cumpliendo  $y < x \Leftrightarrow y \leq x$ ,  $y \neq x$ .

Lema de Zorn  $\Leftrightarrow$  Axioma de elección

### 3. Idea fundamental para el Ejercicio 1

$$\dim_{\mathbb{K}} \ker L + \dim_{\mathbb{K}} \text{Im } L = \dim V$$

# EJERCICIO 1. B)

$L$  es "trivialmente lineal"

$$\text{Si } L(f) = 0 \Rightarrow \int_0^t f(s) ds = 0, \forall t \in [0,1]$$

T.F.C.  
 $\Rightarrow f(t) = 0, \forall t \in [0,1] \Rightarrow \ker L = \{0\}$

$$(L f)(0) = 0, \quad \cos t \in C[0,1] \setminus \text{Im } L$$

D. Alvarado  
Septiembre 2022

# ESPACIOS NORMADOS. EJEMPLOS

Recado

Sep. 2021

Sea  $\mathbb{X}$  un e.v. sobre  $K(\mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C})$ . Una norma en  $\mathbb{X}$  (Banach, 1.922) es una aplicación

$\|\cdot\|: \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty)$ ,  $x \mapsto \|x\|$ , que satisface:

$$(N1) \quad \|x\| > 0, \forall x \in \mathbb{X}; \quad \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(N2) \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|, \forall \lambda \in K, \forall x \in \mathbb{X}$$

$$(N3) \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \forall x, y \in \mathbb{X} \text{ (desig. triangular)}$$

Un espacio vectorial se dice normado si está equipado con una norma  $\|\cdot\|$ . Se indica  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ .

En cualquier espacio normado se puede definir una distancia (o métrica), inducida por la norma:

$$d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow [0, +\infty), \quad (x, y) \mapsto d(x, y) = \|x-y\|.$$

Las propiedades abstractas de una métrica fueron introducidas por Fréchet en su tesis doctoral de 1.906. Véase el final de este archivo.

A continuación describimos algunos ejemplos significativos.

**Ejemplo 1.**  $\mathbb{R}^n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$

$\forall p \in [1, +\infty)$ , podemos definir

$$\|x\|_p = \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Es claro que la única propiedad de la norma que no es evidente es la (N3), desigualdad triangular, que en este caso ocurre si  $p \geq 1$ .

caso particular se llama desigualdad de MINKOWSKI.

Probaremos la misma escalonadamente mediante (P1), (P2), (P3):

P1.  $\forall a, b \in [0, +\infty)$ ,  $\forall p > 1, q > 1, t.q. \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , se tiene

$$(\text{Desig. de Young}) \quad a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q} \quad (\text{P1.1}) \quad (\text{Tivial si } a=0 \text{ ó } b=0)$$

Lema previo:  $\forall \alpha \in (0, 1)$ ,  $\forall x \in [1, +\infty)$ , se tiene

$$\alpha(x-1) + 1 \geq x^\alpha \quad (*)$$

Demost. Si  $f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \alpha(x-1) + 1 - x^\alpha$ , entonces

$$f'(x) = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) = \alpha\left(1 - \frac{1}{x^{1-\alpha}}\right) \geq 0,$$

ya que  $x^{1-\alpha} \geq 1$ ,  $\forall x \geq 1$ ,  $\forall \alpha \in (0, 1)$  ( $x^{1-\alpha} \text{ es } \uparrow \text{ en } [1, +\infty)$ )

Así  $f \uparrow$  en  $[1, +\infty)$ . Por tanto  $f(x) \geq f(1) = 0, \forall x \in [1, +\infty)$

y (\*) está probado. Si ahora tomamos en (\*) (suponemos  $a>0, b>0$ )

$$\alpha = \frac{1}{p}, \quad x = \frac{a}{b} \quad \text{si } a \geq b \quad (\alpha = \frac{1}{p}, \quad x = \frac{b}{a} \quad \text{si } a \leq b)$$

tenemos

$$\frac{1}{p}\left(\frac{a}{b}-1\right)+1 \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{p}} \Rightarrow \frac{a-b}{pb} + 1 \geq a^{\frac{1}{p}} \cdot b^{-\frac{1}{p}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a-b}{p} + b \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1-1/p}{p}} \Rightarrow \frac{a}{p} + b\left(1 - \frac{1}{p}\right) \geq a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1-1/p}{p}}$$

Como  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ,  $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p}$ , lo que prueba (P1.1)

P.2. Desigualdad de Hölder  $\forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$  ( $\text{o } \mathbb{C}^n$ ), tenemos

$$\sum_{k=1}^n |x_k|_p \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^q\right)^{1/q}$$

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| = \left( \sum_{k=1}^n |x_k| \right) \left( \sum_{k=1}^n |y_k| \right) \quad (\text{D.H})$$

dónde, como anteriormente,  $p > 1, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

(Desigualdad de Cauchy-Schwarz para  $p = 2, q = 2$ )

Demostración. Si  $x = 0$  ó  $y = 0$ , la (D.H.1) es evidente. Así

puso, suponemos  $x \neq 0, y \neq 0$  (Aqui  $0 \in \mathbb{R}^n$ ).

Definamos  $a_k = \frac{|x_k|^p}{\|x\|_p^p}, b_k = \frac{|y_k|^q}{\|y\|_q^q}, 1 \leq k \leq n$ .

Entonces, por (P1.1), tenemos  $a_k^{1/p} b_k^{1/q} \leq \frac{a_k}{p} + \frac{b_k}{q}$

$$\frac{|x_k|}{\|x\|_p} \frac{|y_k|}{\|y\|_q} \leq \frac{|x_k|^p}{p \|x\|_p^p} + \frac{|y_k|^q}{q \|y\|_q^q}$$

$$\text{Así, } |x_k| |y_k| \leq \frac{|x_k|^p}{p} \|x\|_p^{p-1} \|y\|_q + \frac{|y_k|^q}{q} \|y\|_q^{q-1} \|x\|_p$$

Sumando ahora, desde 1 a n, tenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |x_k| |y_k| &\leq \frac{1}{p} \|x\|_p^p \|y\|_q^{1-p} \|y\|_q + \frac{1}{q} \|y\|_q^q \|x\|_p^{1-q} \|x\|_p \\ &= \frac{1}{p} \|x\|_p \|y\|_q + \frac{1}{q} \|x\|_p \|y\|_q = \\ &= \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{c.q.d. (D.H.)} \end{aligned}$$

**P.3** Con la ayuda de (D.H), deducimos la desigualdad triangular o desigualdad de Minkowski para  $\|\cdot\|_p$ .  
En efecto, Sean  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Entonces:

$$\|x+y\|_p^p = \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p = \sum_{k=1}^n (|x_k + y_k|^{p-1}) (|x_k| + |y_k|) =$$

$k=1$

$$= \sum_{k=1}^n |x_k| |x_k + y_k|^{p-1} + \sum_{k=1}^n |y_k| |x_k + y_k|^{p-1} \leq (\text{D.H.})$$

$$\left( \sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \sum_{k=1}^n |y_k|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^{q(p-1)} \right)^{\frac{1}{q}}$$

Como  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} = \frac{p-1}{p} \Leftrightarrow p = q(p-1)$ , tenemos

$$\begin{aligned} \|x+y\|_p^p &\leq \|x\|_p \left( \|x+y\|_p^p \right)^{\frac{1}{q}} + \|y\|_p \left( \|x+y\|_p^p \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= (\|x\|_p + \|y\|_p) \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \quad (***) \end{aligned}$$

Si  $\|x+y\|_p = 0$ , la desigualdad triangular es trivial.

Finalmente, si  $\|x+y\|_p \neq 0$  (o lo que es lo mismo,  $x \neq -y$ ) de  $(**)$ , tenemos:

$$\|x+y\|_p^{p-\frac{p}{q}} \leq \|x\|_p + \|y\|_p$$

Para  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{p}{q} = p \Leftrightarrow 1 = p - \frac{p}{q}$ , lo

que prueba la desigualdad triangular.

Uf, al fin hemos probado la desigualdad triangular para  $\|\cdot\|_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$ . Por cierto, la palabra Uf, según la RAE, es una "voz onomatopóea" que significa cansancio, fastidio o sofocación. ¡Seguro que más de uno ha tenido estas sentencias! Pero no hay más

remedio. Las desigualdades dan muy buenas, pero, en general, difíciles de probar. Leí algún vez en algún sitio: "Las leyes de la Matemática se expresan con incusiones. Las ecuaciones dan un accidente". Me gustó.

Estábamos con ejemplos de espacios normados y este ha sido el primero. Creo que los que siguen son "más alegribles".

Ejemplo 2.  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ , donde  $\forall x \in \mathbb{R}^n, x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  
 $\|x\|_\infty = \max \{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ .

Es trivial probar las propiedades de una norma.

Ejemplo 3.  $\mathcal{X} = C([a, b], \mathbb{R})$  con  $\|\cdot\|_\infty$ , donde  
 $\forall x \in C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\|x\|_\infty = \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$

Cuestión: ¿Por qué existe el máximo anterior?

En  $\mathcal{X}$  podemos definir otras normas. De hecho, para cada  $p$ ,  $1 \leq p < +\infty$

$$\|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}$$

es una norma en  $\mathcal{X}$ .

Ejemplo 4.  $\mathcal{X} = C^m([a, b], \mathbb{R})$ ,  $m \in \mathbb{N}$  fijo

Aquí podemos definir "muchas normas":

$$\|x\|_{\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| ; \|x\|_{1,\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \max_{t \in [a,b]} |x'(t)|,$$

$$\dots \|x\|_{m,\infty} = \max_{t \in [a,b]} |x(t)| + \dots + \max_{t \in [a,b]} |x^{(m)}(t)|,$$

También si  $1 \leq p < +\infty$ ,

$$\|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \text{ etc.}$$

El hecho de elegir una norma u otra depende de la situación que estemos tratando, como viremos a lo largo del curso.

### Ejemplo 5. "Espacios de sucesiones"

Recordemos que si  $1 \leq p < +\infty$ ,

$$l_p = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p < +\infty \right\}$$

Una norma "natural" para  $l_p$  es

$$\| (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_p = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|^p \right)^{1/p}$$

También,

$$l_\infty = \left\{ (a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ es acotada} \right\}$$

y una norma "natural" es

$$\| (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

Las demostraciones para ver que tanto  $\| \cdot \|_p$ ,

$\| \cdot \|_\infty$  y  $\| \cdot \|_\infty$  son normas.

Si  $p < +\infty$ , como  $\| \cdot \|_\infty$ , dan una norma en los respectivos espacios de sucesiones, dan similares al caso  $\mathbb{R}^n$  (Ejemplos 1 y 2 anteriores), teniendo la precaución de mostrar primero la "verificación de sumas finitas" y luego hacer un paso al límite (no hay problema, pues las series consideradas son convergentes). ¡Inténtalo!

Ejemplo 6.

"Espacios de Lebesgue de funciones integrables"

$$\text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$L^p(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x \text{ es medible}, \int_a^b |x(t)|^p dt < +\infty \right\}$$

$$L^\infty(a,b) = \left\{ x: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}: x \text{ medible}, \exists M > 0: |x(t)| \leq M, \text{a.e. } [a,b] \right\}$$

$$\text{con } \|x\|_p = \left( \int_a^b |x(t)|^p dt \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < +\infty, \forall x \in L^p(a,b)$$

$$\|x\|_\infty = \inf \left\{ M: |x(t)| \leq M, \text{a.e. en } [a,b] \right\}, \quad \forall x \in L^\infty(a,b)$$

(este último también llamado supremo elemental de  $x$  y notado como  $\text{supessl } x(t)$  ó  $\text{ess sup } |x(t)|$ )

La demostración de que las definiciones anteriores condicionen auténticas normas, no es trivial, si lo estás y de puedes consultar para ello la bibliografía recomendada. Básicamente, para el caso  $1 \leq p < +\infty$

de parte de la desigualdad de Young para obtener la "correspondiente" desigualdad de Hölder, y de aquí, la desigualdad de Minkowski (triangular).

Para terminar, una foto de S. Banach (1891-1945)



Banach fué el fundador del Análisis Funcional y otro de H. Minkowski (1864-1909)



"El espacio y el tiempo, por sí mismos, se han desvanecido y solo existe una especie de mezcla de los dos"

A. Gómez  
Septiembre 2021

## COMPLEMENTOS

1. Espacios métricos. Sea  $\mathbb{X}$  un conjunto. Una métrica en  $\mathbb{X}$  es una aplicación  $d: \mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow [0, \infty)$  que satisface:

a)  $d(x, y) \geq 0$ ,  $d(x, y) = 0 \iff x = y$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{X}$

b)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{X}$

c)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ ,  $\forall x, y, z \in \mathbb{X}$   
(Desigualdad triangular)

2. Sea  $\bar{X}$  un espacio vectorial sobre  $K$  ( $K = \mathbb{R}$  ó  $\mathbb{C}$ ). Demuéstre que en  $\bar{X}$  se puede definir una norma.

3. Sea  $\bar{X}$  un espacio normado y  $(x_n)$  una sucesión en  $\bar{X}$  convergente. Pruebe que las sucesiones

$$\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\frac{x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n}{n^2}$$

son convergentes y encuentre su límite.

④ Des. Young, Hölder y Minkowski para funciones.

Sea  $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ , con medida positiva (p.ejemplo, un algúin abierto no vacío y acotado). Recordemos que si  $1 \leq p < \infty$

$$L^p(\mathcal{R}) = \{f: \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{medible}, \int_{\mathcal{R}} |f(x)|^p dx < +\infty\}$$

$$\text{Hölder: } p, q > 1 / \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

$$f \in L^p(\mathcal{R}), g \in L^q(\mathcal{R}) \Rightarrow fg \in L^1(\mathcal{R}) \geq$$

$$\int_{\mathcal{R}} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

Minkowski: es la desigualdad triangular  
para  $\| \cdot \|_p$  en  $L^p(\mathbb{R})$ .

J. Gómez  
Septiembre 2021

## TOPOLOGÍA DE ESPACIOS NORMADOS

Nº 1  
Octubre 2021

Si  $(\bar{X}, \|\cdot\|)$  es un espacio normado, entonces en  $\bar{X}$  se puede definir una métrica  $d: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto d(x, y) = \|x - y\|$ . Por tanto cualquier espacio normado es espacio métrico y consecuentemente, espacio topológico. Eso nos permite hablar de: bolas abiertas, bolas cerradas, subconjuntos abiertos, cerrados, interior, clausura, densidad, sucesiones y series convergentes, sucesiones de Cauchy, espacios completos, etc.

Repetir aquí todos estos conceptos nos "haría perder el tiempo" y el alumno interesado puede consultar la bibliografía recomendada.

En esta nota vamos a concentrarnos en aquellos conceptos y propiedades "propios de la dimensión infinita" y las diferencias fundamentales con los espacios de dimensión finita ( $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{C}^n$ ), con los que el alumno debe estar familiarizado.

Atención a las notas que siguen (en rojo y son ejercicios)

①  $(\bar{X}, \|\cdot\|) \Rightarrow (\bar{X}, d)$  métrico ( $d(x, y) = \|x - y\|$ )  
 $(\bar{X}, d)$  métrico  $\nRightarrow$  la métrica derive de una norma

Ejemplo  $d: \bar{X} \times \bar{X} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x=y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases}$$

② Si  $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$  es normado, las aplicaciones:

- a)  $\mathbb{X} \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}, (x,y) \rightarrow x+y$
- b)  $K \times \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}, (\lambda, x) \rightarrow \lambda x$
- c)  $\mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}, x \rightarrow \|x\|$

son continuas, cuando en  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  y  $K \times \mathbb{X}$  se considera la topología producto.

Nota: En  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  podemos definir, por ejemplo, la norma:  $\|(x,y)\| = \max \{\|x\|, \|y\|\}$   
 Entonces la bola abierta de centro  $(a,b) \in \mathbb{X} \times \mathbb{X}$  y radio  $r > 0$ , en  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ , satisface:

$$B_{\mathbb{X} \times \mathbb{X}}((a,b), r) = B_{\mathbb{X}}(a, r) \times B_{\mathbb{X}}(b, r)$$

Luego la topología de la norma  $\|( \cdot, \cdot )\|$  en  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$  es la topología producto en  $\mathbb{X} \times \mathbb{X}$ . Análogamente para  $K \times \mathbb{X}$ .

Probemos ya la continuidad de las aplicaciones anteriores:

- a)  $f: (x_n, y_n) \rightarrow (x, y)$ , entonces  $x_n \rightarrow x$ ,  $y_n \rightarrow y$ . Como  $\|x_n + y_n - (x+y)\| \leq \|x_n - x\| + \|y_n - y\|$  tenemos que  $(x_n + y_n) \rightarrow x+y$

b) "Es igual de sencillo". En efecto, si  
 $(\lambda_n, x_n) \rightarrow (\lambda, x) \in K \times X$ , entonces  $(\lambda_n) \rightarrow \lambda$ ,  
 $(x_n) \rightarrow x$ . Como  $(x_n) \rightarrow x$ , la sucesión  $(x_n)$  está  
acotada:  $\exists M > 0 / \|x_n\| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}$  (¿Habías olvidado  
esto?)  
luego

$$|\lambda_n x_n - \lambda x| = |\lambda_n x_n - \lambda x_n + \lambda x_n - \lambda x| \leq |\lambda_n - \lambda| \|x_n\| +$$
 $+ |\lambda| \|x_n - x\| \leq |\lambda_n - \lambda| M + |\lambda| \|x_n - x\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

c) La demostración de c) es trivial si usamos la  
desigualdad

$$| \|x\| - \|y\| | \leq \|x - y\|, \forall x, y \in \mathbb{X} \quad (*)$$

ya que si  $x_n \rightarrow x$ , entonces, por (\*),  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$   
¡Atrévete a probar \*! Es fácil.

③ "Diferencia importante entre la dimensión finita e  
infinita"

Para que queden claras las "ideas fundamentales"  
vamos a "comparar" la convergencia de  $\mathbb{R}^2$  con la  
de los (*pero lo mismo ocurriría con  $\mathbb{R}^p$  y  $l_q, 1 \leq q \leq +\infty$* )

Sea  $(x^n)$  una sucesión de  $\mathbb{R}^2$ ,  $x^n = (x_1^n, x_2^n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   
y  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . Entonces, si en  $\mathbb{R}^2$  consideramos  
la norma  $\|y\|_{\mathbb{R}^2} = \|(y_1, y_2)\| = \max \{|y_1|, |y_2|\}$

de tiene:

$$x^n \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1 \\ x_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2 \end{cases}$$

Estos es fácil de probar, pues:

$$(x^n) \xrightarrow{\mathbb{R}^2} x \Leftrightarrow \| (x^n - x) \|_{\mathbb{R}^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

↑↑

$$\max \{ |x_1^n - x_1|, |x_2^n - x_2| \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$x_1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_1, \quad x_2^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_2$$

Atención: - En  $\mathbb{R}^2$  podemos considerar cualquier otra norma (¡Si no recordás la causa, debes empezar a repasar algunos apuntes!)

- Podemos tratar con  $\mathbb{R}^p$ ,  $p \in \mathbb{N}$  y el resultado es el mismo (¿Por qué?)

Si  $(f^n)$  es una sucesión en  $\mathbb{R}^p$ :

$$f^1 = (f_1^1, f_2^1, \dots, f_p^1)$$

$$f^2 = (f_1^2, f_2^2, \dots, f_p^2)$$

-----

$$f^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_p^n)$$

entonces

$$(f^n) \xrightarrow{\mathbb{R}^p} f$$

$$(f^n) \xrightarrow{\text{IR}} f = (f_1, \dots, f_p)$$

↑↓

$$(f_i^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f_i, \quad 1 \leq i \leq p$$

En resumen: "la convergencia en  $\mathbb{R}^P$  es equivalente a la convergencia por columnas".

Ahora observa el ejemplo siguiente en los:

$$f^1 = (0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$f^2 = (0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

$$f^3 = (0, 0, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

-----

$$f^n = (0, \dots, 0, 1, 1, 1, \dots)$$

-----

¿Evidentemente?, la sucesión  $(f^n)$  es una sucesión de elementos de los que, por columnas converge al elemento

$$f = (0, 0, 0, \dots) \in \text{los}$$

pero  $(f^n) \xrightarrow{d^\infty} f$ , pues  $\|f^n\|_\infty = 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Puede probarse fácilmente? que la convergencia en  $L^p$  implica la convergencia por columnas,

pero que el recíproco no es cierto.

"Es posible que la causa de ello sea la dimensión infinita" ¿Estás de acuerdo? (Si no es así, repasa lo anterior hasta que te conviertas).

#### ④ Espacios de Banach. Ejemplos importantes.

Un grupo especial de espacios normados lo constituyen los "espacios normados completos" (aquellos donde cualquier sucesión de Ceches es convergente a un elemento del espacio normado considerado). El ejemplo más elemental es  $\mathbb{R}^n$  (con cualquier norma),  $\mathbb{C}^n$ , etc. (en general, cualquier espacio normado de dimensión finita). En dimensión infinita, gritás el tema sea más divulgado, ya que nos encontraremos con espacios normados completos (llamados, en adelante, ESPACIOS DE BANACH) y otros que no lo son, como muestran los ejemplos que siguen.

4.1  $L_p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , con la norma matricial, es un espacio de Banach.

Merece la pena hacer la demostración, puesto que se repiten conceptos importantes sobre series convergentes. ¡Vamos a ello!

Por simplicidad, vamos a demostrar que  $(l_2, \| \cdot \|_2)$  es completo (idénticas casi pueden intercambiarse en los otros casos). Recordemos

$$l_2 = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \right\},$$

$$\| (x_n) \|_2 = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}, \quad \forall (x_n) \in l_2.$$

Sea  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $l_2$

Objetivo: Demostrar que  $\exists x \in l_2 / x^k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} x$  en  $l_2$

En efecto, pensemos que  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una "sucesión de sucesiones":

$$x^1 = (x_1^1, x_2^1, \dots, x_n^1, \dots)$$

$$x^2 = (x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2, \dots) \quad (0)$$

$$\cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots$$

$$x^K = (x_1^K, x_2^K, \dots, x_n^K, \dots)$$

Como  $(x^K)$  es de Cauchy en  $l_2$ :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \|x^{k+p} - x^k\|_2 \leq \varepsilon$$

$$\text{Como } \|x^{k+p} - x^k\|_2 = \left( \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon \quad (1)$$

Esto implica:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists K_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K_0(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, |x_n^{k+p} - x_n^k| \leq \varepsilon \quad (2)$$

(pensemos que  $\forall n \in \mathbb{N}$ , fijo,  $|x_n^{k+p} - x_n^k| \leq \|x^{k+p} - x^k\|_2$ )

Importante: Observemos que la desigualdad en (2) es "uniforme" respecto del  $p \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ .

¡Esta es la clave! En efecto:

o lo que es lo mismo, fija una columna,

a) Fijado  $n \in \mathbb{N}$ , (2) implica que la sucesión  $(x_n^k)_{k \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy de números reales (o complejos). Es decir, cada columna de la expresión (0) es una sucesión de Cauchy (supongamos real, aunque es similar si es compleja). La conclusión es que  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x_n$  fijo

Sea  $X = (x_{n,k})_{n \in \mathbb{N}}$ . Creo que, a estas alturas, "todo el mundo al imagina lo que va a suceder":

$$x \in \mathbb{L}_2, \quad x^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x, \quad \text{en } \mathbb{L}_2. \quad (3)$$

Ahora, la clave está en volver a (1) (¡caprichos del destino!):

$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > k_0(\varepsilon)$ , tenemos  
 $\forall p \in \mathbb{N}$

$$\sum_{n=1}^N |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \text{A.N.G.M.}$$

$\Downarrow$

$\downarrow p \rightarrow +\infty, k > k_0(\varepsilon)$  fijo  
 $(\varepsilon \text{ fijo, por supuesto})$

$$\sum_{n=1}^N |x_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2, \quad \begin{matrix} \text{A.N.G.I.} \\ \forall k > k_0(\varepsilon) \end{matrix}$$

$\Downarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (4)$$

$\forall k > k_0(\varepsilon)$

Pero (4)  $\Rightarrow x - x^k \in l_2, \forall k > k_0(\varepsilon)$

Además  $x = x^k + (x - x^k) \Rightarrow x \in l_2$

y "si leemos de nuevo (4)":

$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > k_0(\varepsilon) \Rightarrow \|x - x^k\|_2 \leq \varepsilon$

"Aqui acaba la demostración de que  $(l_2, \|\cdot\|_2)$  es un espacio de Banach". Como veis, consiste en usar "hábilmente" la expresión (1) y los "pasos al límite" (Esto es la esencia del ANÁLISIS MATEMÁTICO).

Vamos ahora un ejemplo negativo:

4.2. Sea  $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$  el espacio normado de funciones polinomiales (con coeficientes reales), restringidas a  $[0,1]$ , con la norma

$$\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |f(t)|, \quad \forall f \in \mathcal{P}_{[0,1]}$$

Demostraremos que NO ES UN ESPACIO DE BANACH

La idea básica es un resultado de cursos anteriores que debemos recordar:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (5)$$

de manera uniforme en  $[0,1]$ .

Ya está: de (5) se deduce que la sucesión de polinomios  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,

$$P_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

converge, en  $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$  a la función exponencial. Luego  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$  que no converge en  $(\mathcal{P}_{[0,1]}, \|\cdot\|_\infty)$ .

¿ Necesitas alguna aclaración adicional?  
 Lee y medita, todas las veces que haga falta,  
 lo que hemos afirmado en este apartado (4.2),  
 pues el contenido es "análisis puro".

## 5. Otra diferencia importante entre los espacios normados de dimensión finita e infinita.

Si  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  es un espacio normado, cualquier subespacio vectorial  $F$ , de  $\mathbb{X}$ , de dimensión finita es cerrado. Esto "es sencillo" y, básicamente es un "juego de palabras llevado a cabo convenientemente. En efecto, sea

$B = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$  una base de  $F$ . Entonces  $\forall f \in \bar{F}$  (clausura o cierre de  $F$ ), tenemos que  $\exists (f^k)_{k \in \mathbb{N}} \subset F / f^k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{\|\cdot\|} f$

Si escribimos

$$\begin{aligned} f^1 &= a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \dots + a_m^1 x^m \\ f^2 &= a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \dots + a_m^2 x^m \\ &\vdots \\ f^k &= a_1^k x^1 + a_2^k x^2 + \dots + a_m^k x^m \end{aligned} \tag{6}$$

entonces  $\exists a \in \mathbb{R}^m$  t. q.  $\left( a_i^k \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^i$

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_i^k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a^2 \\ \vdots \\ a_m^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a_m \end{array} \right.$$

(como sucesiones de números reales). Si no te enteras bien de esto, necesitas recordar algunas cosas: En  $F$  tenemos definida la norma  $\|\cdot\|$ , inducida por  $\mathbb{X}$ . Pero como  $F$  tiene dimensión finita, todas las normas definidas en  $F$  son equivalentes y haremos, por ejemplo,  $\|\cdot\|_\infty$  en  $F$ , es decir

$$\|g\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} |g_{ii}|, \quad \forall g = g_1 x^1 + \dots + g_m x^m \in F,$$

sabemos que la convergencia de la sucesión  
(6) equivale a la convergencia por columnas.  
Conclusión:  $f^k \xrightarrow{\|\cdot\|} a^1 x^1 + \dots + a^m x^m \in F$

Así  $\bar{F} = F$  y  $F$  es cerrado.

En dimensión infinita, la situación puede cambiar drásticamente. Para ello, "una imagen, o un ejemplo, vale más que mil palabras"

$C_{00}$  es denso en  $\ell_2$  (es decir  $\overline{C_{00}} = \ell_2$ , en el espacio  $(\ell_2, \|\cdot\|_2)$ )

(7)

Observemos que  $C_{\ell_2}$  (conjunto de sucesiones "casi nulas") es un subespacio vectorial de  $\ell_2$  (no cerrado, según (7)).

¡Problemas (7)! Claramente,  $\overline{C_{\ell_2}} \subset \ell_2$ .

Veamos el recíproco: Dada  $x \in \ell_2$ ,  $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .  
 Como la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2$  es convergente, la

serie de restos tiende a cero (¿habrás olvidado este hecho fundamental?). Es decir, la

Sucesión

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2, \sum_{n=2}^{+\infty} |x_n|^2, \dots, \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2, \dots$$

tiende a cero cuando  $k \rightarrow +\infty$  (¿alguien se atreve a decir ahora que la teoría no es importante en Matemáticas?)

Por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall k > K_0 \text{ se tiene } \sum_{n=k}^{+\infty} |x_n|^2 \leq \varepsilon$$

Consideremos el elemento de  $C_{\ell_2}$  dado por

$$y^{K_0} = (x_1, x_2, \dots, x_{K_0}, 0, 0, \dots)$$

$$\text{Entonces } \|x - y^{K_0}\|_2 = \left( \sum_{n=K_0}^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon^{1/2}.$$

"A estas alturas, espero que nadie tenga un problema porque aparece  $\mathcal{E}^{1/2}$  en lugar de  $\mathcal{E}$ "

El razonamiento anterior prueba que  $\overline{C_{00}} = l_2$

6. Noción de separabilidad (aquí es cuestión de gustos: existen analogías y diferencias con la dimensión finita).

Un espacio normado  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  se dice separable si existe algún subconjunto  $D \subset \mathbb{X}$ ,  $D$  denso y numerable.

Por ejemplo  $\mathbb{R}^n$  es separable, pues podríamos tomar  $D = \mathbb{Q}^n$  ( $\mathbb{Q}$  es el conjunto de los números racionales).

Una idea parecida puede usarse para ver que  $l_p$ ,  $1 \leq p < +\infty$  es separable, pero los no lo es. En efecto, demostraremos que  $l_1$  es separable (las mismas ideas se usan para  $l_p$ ,  $1 < p < +\infty$ ).  
Sea  $D \subset l_1$ ,  $D$ : conjunto de sucesiones racionales casi unidas ( $D$  es unión numerable de conjuntos numerables y por tanto  $D$  es numerable). Por otra parte,  $\forall x \in l_1, \forall \varepsilon > 0, \exists K_0(\varepsilon): K > K_0(\varepsilon), \text{ s.t. } \sum_{n=K}^{\infty} |x_n| < \varepsilon$

(También,  $\mathbb{Q}^{\infty}$  es denso en  $\mathbb{R}^{\infty}$ )

Como  $\mathbb{Q}$  es denso en  $\mathbb{R}$ ,  $\exists q_1, \dots, q_K \in \mathbb{Q}$  :

$$\sum_{n=1}^{K_0} |x_n - q_n| < \varepsilon. \text{ Por tanto si } y = (q_1, \dots, q_{K_0}, 0, 0, \dots)$$

$$\text{tenemos } \|x - y\|_1 < 2\varepsilon. \text{ Esto prueba que } \bar{D} = l_1$$

En cambio, los no es separable.

(Te has preguntado por qué no se puede hacer una demostración similar a la anterior)

Para ver que los no es separable, podemos proceder como sigue (reducción al absurdo) : Sea

$$C = \{x^p : p \in \mathbb{N}\} \subset \text{los}, \text{ denso}. \text{ Sea } B \subset \text{los},$$

$$B = \{(y_n)_{n \in \mathbb{N}} : y_n \in \{0, 1\}, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Notemos que si  $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}, z = (z_n)_{n \in \mathbb{N}}$  son elementos distintos de  $B$ , entonces

$$\|y - z\|_\infty = 1. \text{ Además, como } C \text{ es denso}$$

$$\text{en los, } \forall y \in B \quad \exists x^{p(y)} \in C : \|y - x^{p(y)}\|_\infty < \frac{1}{4}$$

$$\text{Claramente } B \left( y, \frac{1}{3} \right) \cap B \left( z, \frac{1}{3} \right) = \emptyset,$$

$$\forall y, z \in B, y \neq z \text{ (pues } \|y - z\|_\infty = 1)$$

Tenemos que la aplicarán  $B \rightarrow \mathbb{N}$   
 $y \mapsto p(y)$

es inyectiva. Luego  $\mathbb{B}$  es numerable. Pero Sabemos que  $B$  no es numerable (¿de te ha olvidado el desarrollo decimal, en base 2, de los reales?).

Merece la pena que reflexiones sobre el siguiente resultado abstracto y general (muchas veces los resultados generales son más claros del enunciado que los particulares):

$\mathbb{E}(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  es un espacio normado t.q.  $\exists B \subset \mathbb{X}$ ,  $B$  no numerable y satisfaciendo la propiedad siguiente:

$\exists \alpha > 0 : \|x-y\| \geq \alpha, \forall x, y \in B, x \neq y$

entonces  $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$  no es separable.

7. COMPACIDAD. Esto es "harina de otro costal" en los espacios normados de dimensión infinita, como viene viendo a lo largo del curso. Pero, para abrir boca, veamos algo.

7.1. Sea  $(\mathbb{E}, \|\cdot\|)$  un espacio normado y  $B \subset \mathbb{X}$ . Como  $\mathbb{E}$  es también un espacio métrico (la métrica deriva de la norma) y por tanto,

un espacio topológico, tiene sentido hablar de compactitud;  $B$  es compacto cuando para cualquier recubrimiento de  $K$ , por abiertos, es posible extraer un subrecubrimiento finito. Esta definición de compactidad es poco útil en la práctica. Es posible que recordéis los medios siguientes:

A) Si dim  $\mathbb{X}$  es finita,  $B$  es compacto si y sólo si  $B$  es cerrado y acotado.

B) En espacios métricos (y por tanto en espacios normados) la compactidad es equivalente a la "compactidad secuencial" (o "compactidad por sucesiones"):

$B$  es compacto  $\Leftrightarrow \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset B, \exists (x_{n_k}) \rightarrow x \in B$  (8)

Por tanto, como el ambiente en el que nos vamos a mover este curso, es el "ambiente de espacios normados", adoptaremos la propiedad anterior (8) como "definición de conjunto compacto". Comenzamos con algo sencillo.

7.2. Ejercicio. Si  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  es normado y  $B \subset \mathbb{X}$  es compacto, demuestra que  $B$  es cerrado y acotado.

En efecto,  $\forall x \in \bar{B}$  (clausura o cierre de  $B$ ),

$\exists (x_n) \subset B : (x_n) \rightarrow x$ . Como  $B$  es compacto,

$\exists (x_{n_k}) \rightarrow y \in B$ . Ahora bien  $(x_{n_k})$  es una subsecuencia de

$(x_n)$ , que es convergente a  $x$ . Luego  $y = x$ , lo que implica  $x \in B$ . Por tanto  $\bar{B} = B$ , y  $B$  es cerrado.

Por otra parte, si  $B$  no fuere acotado  $\exists (x_n) \subset B$ :

$\|x_n\| > n, \forall n \in \mathbb{N}$  (*¿Por qué?*). Esto implica que  $(x_n)$  <sup>subsucesión</sup> no puede tener ninguna sucesión parcial convergente, pues cualquier sucesión convergente es acotada y  $(x_n)$  no lo es (*¡OS suena esto a "juego de palabras"*).

El ejercicio que sigue muestra otra "diferencia significativa" entre la dimensión finita e infinita.

7.3. Demuestra que la bola cerrada unidad de  $\ell^2$  no es compacta.

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la sucesión de "vectores canónicos del". Entonces  $\|x_n - x_m\| = \sqrt{2}, \forall n \neq m$ . Esto implica que cualquier sucesión parcial de  $(x_n)$  no es de Cauchy. Así  $(x_n)$  no puede tener ninguna sucesión parcial convergente.

7.4 Otro ejercicio sobre "dimensión finita versus dimensión infinita".

Demuestra que la bola cerrada unidad de  $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$  no es compacta.

Sea  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dada por  $x_n(t) = t^n, \forall t \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}$ .

$h'(x_n)$  es alguna subsucesión convergente a  $x \in C[0,1]$ , donde  $x_n(t) = t^{n_k}$ . Como  $n_k \rightarrow +\infty$ ,  $(x_n)$

converge puntualmente a la función

$$y: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \begin{cases} 0, & t \in [0,1) \\ 1, & t = 1 \end{cases}$$

Como  $y$  debe ser igual a  $x$  (por unicidad del límite), esto no es posible, pues  $y \notin C[0,1]$ .

(¿Habías aliviado que convergencia uniforme implica convergencia puntual?).

## COMPLEMENTOS

C. 1.  $(C([0,1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$  es separable.



R. M. Fréchet (1878-1973)



F. Hausdorff (1869-1942)

J. Alvarado

Septiembre 2022

# OPERADORES LINEALES

Alejandro  
Octubre 2021

En Análisis Funcional, los operadores lineales juegan un papel muy importante. El alumnado está familiarizado con el caso finito dimensional.

De hecho, si  $L: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es lineal, es decir,

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y) \quad (1)$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

entonces  $L$  se representa como

$$L(X) = AX, \quad \forall X \in \mathbb{R}^n \quad (2)$$

donde  $A$  es una matriz real  $n \times m$ , y reciprocamente, cualquier operador de la forma (2), es un operador lineal. Trivialmente, en este caso, cualquier operador lineal es continuo.

Si  $(E, \| \cdot \|_E)$  y  $(F, \| \cdot \|_F)$  son espacios normados,  $L: E \rightarrow F$  se dice lineal si satisface

$$L(\alpha f + \beta g) = \alpha L(f) + \beta L(g),$$
$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in E$$

IMPORTANTE: las imágenes de cualquier base de  $E$  determinan unívocamente al operador  $L$ .

, siempre se operaciones lineales son:

1)  $L: (C^1[0,1], \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow (C^0[0,1], \| \cdot \|_\infty)$   
 $f \longrightarrow f'$

2)  $L: (C^1[0,1], \| \cdot \|_\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$f \rightarrow \int_0^1 f(t) dt$$

3)  $L: (C^1[0,1], \| \cdot \|_1) \longrightarrow (C[0,1], \| \cdot \|_\infty)$

$$f \rightarrow \int_0^1 f(t) dt + f'(t)$$

Puede ocurrir que, como en algún ejemplo anterior,  $L$  no sea continuo (*¿Puedes decir cuáles?*)

Por tanto, el tema de los operadores lineales, cuando entran en juego espacios normados de dimensiones infinitas, parece atractivo y no trivial. Comencemos con algunas propiedades especiales de los operadores lineales.

Sean  $(E, \| \cdot \|_E)$ ,  $(F, \| \cdot \|_F)$  espacios normados y  $L: E \rightarrow F$  lineal. Entonces:

(P1)  $L$  es continuo  $\Leftrightarrow L$  es continuo en  $e=0$

Demostración:  $\Rightarrow$ ) Evidente

$\Leftrightarrow$  Si  $e_0 \in E$  y  $(e_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e_0$   
 entonces  $(e_n - e_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  por hipótesis  $\Rightarrow L(e_n - e_0) \rightarrow L(0) = 0$   
 $\Rightarrow L(e_n) - L(e_0) \rightarrow 0$ .

(P2)  $L$  es continuo  $\Leftrightarrow L$  es continuo en algún  $e_0 \in E$

Demonstración:  $\Rightarrow$  Evidente

$\Leftarrow$  dala  $e \in E$  y  $(e_n) \rightarrow e$ .  
 Entonces  $e_0 + (e_n - e) \rightarrow e_0$  hip.  $\Rightarrow L(e_0 + e_n - e) \rightarrow L(e_0)$ . Además  $L(e_0 + e_n - e) = L(e_0) + L(e_n) - L(e) \rightarrow L(e_0) \Rightarrow L(e_n) \rightarrow L(e)$

(P3)  $L$  es continuo  $\Leftrightarrow \exists K > 0$  t.q.

$$\|L(e)\|_F \leq K \|e\|_E, \forall e \in E \quad (3)$$

Demonstración:  $\Leftarrow$  Si  $e \in E$  y  $(e_n) \rightarrow e$ ,  
 entonces  $\|L(e_n) - L(e)\| = \|L(e_n - e)\| \leq K \|e_n - e\| \rightarrow 0$

Por tanto,  $L(e_n) \rightarrow L(e)$

$\Rightarrow$  Si (3) no es cierto, entonces

Un  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\exists e_n \in E \setminus \{0\}$  t.q.  $\|L(e_n)\| > n \|e_n\|$

$$\Rightarrow \underbrace{\left\| L\left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) \right\|}_{(*)} > 1. \text{ Pero } \left(\frac{e_n}{n\|e_n\|}\right) \rightarrow 0$$

pues  $\left\| \frac{e_n}{n\|e_n\|} \right\| = \frac{1}{n}$ . Por tanto, por hipótesis,

$L\left(\frac{e^n}{\|e\|}\right) \rightarrow L(0) = 0$ , lo que contradice (\*)

(P4)  $L$  es continuo  $\Leftrightarrow \sup_{e \in E \setminus \{0\}} \frac{\|L(e)\|}{\|e\|} < +\infty$

$\Updownarrow$

$\sup_{\|e\|=1} \|L(e)\| < +\infty$

$\Updownarrow$

A C E, A acotado en E  $\Rightarrow L(A)$  es  
acotado en F

La demostración de las equivalencias anteriores  
es trivial, teniendo en cuenta (P1), (P2) ó (P3).

Como ves, hay muchas caracterizaciones  
sobre la continuidad de los operadores lineales.  
Pero recalquemos ALGO OBVIO: Es para ope-  
radores finales.

Por ejemplo  $L: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \rightarrow x^2$  es  
continua. Sin embargo, no satisface,  
por ejemplo la propiedad (P3).

Evidentemente, algunas otras funciones  
continuas no lineales  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , pueden

de trifacil (P3). Por ejemplo

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow \ln x$$

que es no lineal, trifacil,  $|f(x)| \leq |x|$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . ¿Por qué?

2 ejercicios para "ir abriendo boca"

① Sea  $L: (\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}}) \rightarrow (\mathcal{F}, \|\cdot\|_{\mathcal{F}})$  lineal, y  $\dim \mathcal{E}$  finita. Entonces  $L$  es continua.

② Sea  $(\mathcal{E}, \|\cdot\|_{\mathcal{E}})$  t.q.  $\dim \mathcal{E}$  es infinita.

Demuestra que existe  $L: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$  lineal t.q.  $L$  no es continua, y  $M: \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$  lineal, no continua.

El ejercicio que sigue no es sencillo (le pondremos un asterisco, o guizas dos), pero muy bonito y significativo. Marca, de nuevo, una diferencia profunda entre la dimensión finita e infinita.

Antes de enunciarlo, recordemos que un hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  viene dado por

conjuntos del tipo:

$$B = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : a_1x_1 + \dots + a_nx_n = c\}$$

dónde  $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , son dados.

Por ejemplo, en  $\mathbb{R}^2$ , los hiperplanos son rectas; en  $\mathbb{R}^3$  los hiperplanos son planos, etc.

Es fácil? (atrévete) Demostrar que cualquier hiperplano en  $\mathbb{R}^n$  es cerrado.

Ahora bien...

(\*) ¿(\*)?

③ Sea  $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$  un espacio normado de dimensión infinita. Un hiperplano se define como un conjunto de la forma

$$H = \{x \in \mathbb{X} : f(x) = \alpha\}$$

dónde  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal, no idénticamente cero y  $\alpha \in \mathbb{R}$ , son dados.

Demuestra que cualquier hiperplano  $H$  es o cerrado, o denso en  $\mathbb{X}$ . Demuestra también que existen hiperplanos densos. (El Teorema del Hahn-Banach, que al

explicaré más adelante, nos proporcionará, también, hiperplanos cerrados)

Sugerencia: demuestra que si  $f: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal y no continua, entonces

$$f(B_{\mathbb{X}}(x_0; r)) = \mathbb{R}, \forall x_0 \in \mathbb{X}, \forall r > 0.$$

Si  $(E, \| \cdot \|_E)$  y  $(F, \| \cdot \|_F)$  son espacios normados,  $\mathcal{L}(E, F)$  va a denotar el conjunto de aplicaciones lineales continuas de  $E$  en  $F$ . En el espacio  $\mathcal{L}(E, F)$  se puede definir una norma:

$$\|f\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\| \quad (4)$$

$$\inf_{k>0} \{ k : \|f(x)\| \leq k\|x\|, \forall x \in E \}$$

Es fácil comprobar que (4) es una norma en  $\mathcal{L}(E, F)$  (que verifica la igualdad dada en (4)).

Si  $\dim E = n$ ,  $\dim F = m$ ,  $\mathcal{L}(E, F)$  no es sino el conjunto de matrices reales  $M_{n \times m}$  y la norma (4) depende de las normas que se elijan en  $E$  y  $F$  (para los conceptos topológicos no importa lo que sea  $\dim(M_{n \times m})$  o dim( $)$ )

... para una sucesión, pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = g(x)$ .

TEOREMA. Si  $F$  es un espacio de Banach, entonces  $\mathcal{L}(E, F)$  es un espacio de Banach, con la norma dada en (4).

Demostración. Sea  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}}$  una sucesión de Cauchy en  $\mathcal{L}(E, F)$ . Entonces

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p_0(\varepsilon): p, q > p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p - f_q\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Lo que implica

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists p_0(\varepsilon), p, q > p_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon \|x\|, \forall x \in E$$

Por favor, prueba detalladamente que (5)  $\Rightarrow$  (6) !

Ahora, la clave está en usar "sabiamente" (6).

En efecto:

a) si  $x \in E$  es fijo, (6) implica que  $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$  es una sucesión de Cauchy en  $F$ . Como  $F$  es un espacio de Banach, entonces  $(f_p(x))_{p \in \mathbb{N}}$  converge a un elemento de  $F$ . Podemos así definir un operador

$$f : E \rightarrow F, x \mapsto \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(x), \forall x \in E.$$

La intuición (¿qué haríamos sin ella?) nos

dice que  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  y que  $(f_p)_{p \rightarrow +\infty} \xrightarrow{\mathcal{L}(E, F)} f$ .

Lo confirmamos, nuevamente usando (6)

$$\begin{aligned} b) f(\alpha x + \beta y) &= \lim_{p \rightarrow +\infty} f_p(\alpha x + \beta y) = \lim_{p \rightarrow +\infty} (\alpha f_p(x) + \beta f_p(y)) = \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y), \quad \forall x, y \in E, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c) Lo anterior significa que  $f$  es lineal. Veamos que es continuo (nuevamente, valemos a (6)):

Fijamos  $x \in E$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $p > p_0(\epsilon)$ ,  $q \rightarrow +\infty$  y tenemos

$$\|f_p(x) - f(x)\| \leq \epsilon \|x\|, \quad \forall x \in E \quad (7)$$

Ahí

$$\|f(x)\| = \|f(x) - f_p(x)\| + \|f_p(x)\| \leq (\epsilon + \|f_p\|) \|x\|, \quad \forall x \in E$$

Por tanto,  $f$  es continuo (¡Habías olvidado esto?)

¡Demasiado pronto!

d) Finalmente, veamos que  $(f_p)_{p \in \mathbb{N}} \xrightarrow{\mathcal{L}(E, F)} f$ .

De (7), obtenemos  $\|(f_p - f)(x)\| \leq \epsilon$ ,  $\forall x \in E$ :  $\|x\| \leq 1$

Luego:

$$\forall \epsilon > 0 \exists p_0(\epsilon): p > p_0(\epsilon) \Rightarrow \|(f_p - f)\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq \epsilon, \text{ c.g.d.}$$

En particular, obtenemos el siguiente resultado notable:

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$  es un espacio normado, el espacio normado

$\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ , con la norma  $\|f\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$   
 $\forall f \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$

es un espacio de Banach, al que denotaremos por  $E'$  ( $E^*$  en algunos textos) y al que llamaremos DUAL TOPOLOGICO de  $E$ .

Algunos ejercicios para practicar con los conceptos anteriores!

Ejercicio. Sea  $E = C_0 = \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0\}$  con la norma  $\|(a_n)\|_{C_0} = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$  y  $f: C_0 \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f((a_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{2^n}. \text{ Prueba}$$

a)  $f \in E'$ . Calcula  $\|f\|_{E'}$ . ¿Le alcanza la norma?

b) Si  $F = l_\infty$ ,  $\|(a_n)\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$ ,  $f: F \rightarrow \mathbb{R}$ , dado por la expresión anterior, ¿ $f \in F'$ ? ¿ $\|f\|_{F'}$ ? ¿Le alcanza la norma?

Ejercicio. Sea  $E = \{u \in C([0, 1], \mathbb{R}) : u(0) = 0\}$  con la norma  $\| \cdot \|_\infty$  y  $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto \int_0^1 u(t) dt$ ,  $\forall u \in E$

a) Demuestra que  $L$  es continua y

calcula su norma. ¿Se alcanza la norma?

Ejercicio. Sea  $L: \ell_\infty \rightarrow \ell_1$ ,  $(x_n) \mapsto \left( \frac{x_n}{n^2} \right)$ ,  $\forall (x_n) \in \ell_\infty$

a) Demuestra que  $L$  es lineal y continua.

b) Calcula  $\|L\|$  y demuestra que se alcanza.

Ejercicio. Sea  $L: C_0 \rightarrow \ell_1$ ,  $(x_n) \mapsto \left( \frac{x_n}{n^3} \right)$ ,  $\forall (x_n) \in C_0$

Demuestra que  $L$  es continua y que no se alcanza su norma

El siguiente resultado es uno de los más importantes del curso y es muy significativo pues

caracteriza un concepto algebraico (dimensión  
de un espacio vectorial) usando un concepto

topológico (la compactitud de la bola cerrada unitaria)

TEOREMA (F. Riesz, 1.918)

Sea  $(E, \|\cdot\|)$  normado. Entonces

$\dim E$  es finita  $\Leftrightarrow \overline{B}_E(0; 1)$  es compacto.

Demostrarán.

$\Rightarrow$  "Parte fácil del Teorema", pues  $\overline{B}_E(0; 1)$  es cerrado y acotado. Ahora bien, como la  $\dim E$  es finita (en realidad,  $E$  es  $\mathbb{R}^n$  ó  $\mathbb{C}^n$ , ¿habías olvidado eso?), tenemos que  $\overline{B}_E(0; 1)$  es

compacto.

←) Antes de comenzar esta parte de la demostración, un comentario: decimos, a menudo, que la definición de compacidad en espacios topológicos es "poco usada en la práctica". Curiosamente, aquí va a demostrar todo su potencial. En efecto,

Sea  $B = \bar{B}_E(0; 1)$  que, por hipótesis, es compacto.

Si  $\varepsilon \in (0, 1)$  es fijo, el conjunto

$$\left\{ B_E(b; \varepsilon), b \in B \right\}$$

es un recubrimiento por abiertos de  $B$ . Por ser  $B$  compacto, existe algún subrecubrimiento finito:

$$\exists F = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset B \quad t \cdot q.$$

$$B \subset \bigcup_{i=1}^n B_E(b_i; \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^n (b_i + \varepsilon B_E(0; 1)) \quad (8)$$

Lea  $M$  el subespacio de  $E$  generado por  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$

Entonces, de (8) deducimos

$$B \subset M + \varepsilon B$$

Luego

$$B \subset M + \varepsilon B \subset M + \varepsilon(M + \varepsilon B) = M + \varepsilon M + \varepsilon^2 B = M + \varepsilon^2 B$$

¿Por qué  $M + \varepsilon M = M$ ,  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ?

Finalmente, "es fácil de ver que"

$$B \subset M + \varepsilon^n B, \forall n \in \mathbb{N} \quad (9)$$

(9) implica que  $B \subset M$ . En efecto, de (9) obtenemos:

$\forall b \in B, \exists m_n \in M, b' \in B: b = m_n + \varepsilon^n b'$ , luego  $\|b - m_n\| \leq \varepsilon^n, \forall n \in \mathbb{N}$ . Como  $\varepsilon^n \rightarrow 0, m_n \rightarrow b$ .

Además  $b \in \bar{M} = M$  ( $M$  tiene dimensión finita, y por tanto, es cerrado).

En conclusión

$$B \subset M \quad (10)$$

¡Mira (10) despañol!  $B$  es la bola cerrada unitaria del espacio "total"  $E$  y  $M$  un subespacio de  $E$ . Esto debe impedir:

$$E = M \quad (11)$$

En efecto,  $\forall x \in E \setminus \{0\}, \frac{x}{\|x\|} \in B \subset M \Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in M \Rightarrow x \in M$   
 (¿Por qué?) Finalmente,

Como  $M$  tiene dimensión finita,  $E$  es de dimen. finit.

El resultado anterior es uno de los "mas bonitos del curso" y permite probar otros resultados poco intuitivos, si los comparamos con la dimensión

finita. Por ejemplo.

Ejercicio. Si  $(E, \|\cdot\|)$  es tal que  $\dim E$  es finita, sabemos que cualquier bola cerrada es compacta. Además, su interior topológico es la correspondiente bola abierta. En cambio, prueba que si  $C \subset E$  es compacto y  $\dim E$  es infinita, entonces  $\overset{o}{C} = \emptyset$ ,  $\overset{i}{C} = \text{interior}(C)$ . Puedes : ¡que ricos deben ser los compactos en dimensión infinita y llevas razón!

Otra caracterización de los espacios normados de dimensión finita:

L'  $(X, \|\cdot\|)$ , prueba que  
 $\dim X$  es finita  $\Leftrightarrow$  Todas las normas en  $X$  son equivalentes.



F. Riesz (1880-1956)

*N.C. - 2021*  
Octubre 2021

# TEOREMA DE HAHN-BANACH

Aprendo  
Noviembre 2021

Motivación. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  un espacio normado.  
Si  $\dim E$  es finita, sabemos que cualquier aplicación lineal  $L: E \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.  
Por ejemplo, si  $\dim(E) = n$ , ¿podrías escribir la expresión general de cualquier  $L: E \rightarrow \mathbb{R}$ , lineal?

Si  $\dim(E)$  es infinita, sabemos que existen aplicaciones lineales no continuas (¿te acuerdas?) y aplicaciones lineales continuas (por ejemplo, la que es idénticamente cero). Pero, ¿podrías dar algún ejemplo de aplicación lineal CONTINUA no trivial? En espacios concretos,  $(C([a,b], \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ,  $L_p(1 \leq p \leq +\infty)$ ,  $L^1(a, b)$ , etc. parece fácil, pero si sólo sabemos que  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio normado de dimensión infinita, sin conocer la naturaleza de sus elementos (no sabemos si los elementos son sueldos, funciones...), ¿cómo podemos dar ejemplos de aplicaciones lineales CONTINUAS que no sean idénticas a la cero?

ticamente (ew).

El Teorema que enunciaremos y demostraríamos a continuación viene en nuestra ayuda!

TEOREMA (H. HAHN, 1.927; S. BANACH, 1.929)

Sea  $E(\mathbb{R})$  un espacio vectorial y  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$  verificando

(1)  $\left\{ \begin{array}{l} i) p(\lambda x) = \lambda p(x), \forall \lambda > 0, \forall x \in E \\ ii) p(x+y) \leq p(x) + p(y), \forall x, y \in E \end{array} \right.$

Sea  $G$  un subespacio vectorial de  $E$  y  
 $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  lineal, t. q.

$$g(x) \leq p(x), \forall x \in G \quad (2)$$

ENTONCES:  $\exists f: E \rightarrow \mathbb{R}$  lineal t. q.

$$\left. \begin{array}{l} a) f|_G = g \quad (f(x) = g(x), \forall x \in G) \\ b) f(x) \leq p(x), \forall x \in E. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Demostración. La idea clave es aplicar el LEMA DE ZORN a un conjunto  $P$ , ordenado e inductivo, conveniente. En nuestro caso:

$$P = \left\{ h: D(h) \rightarrow \mathbb{R} \text{ t.q. } D(h) \text{ es un sub vect. de } E \text{ t.q. } D(h) \supset G, h \text{ lineal, } h|_G = g \text{ y, además, } h(x) \leq p(x) \quad \forall x \in D(h) \right\} \quad (4)$$

(Los elementos de  $P$  son aplic. lineales con ciertas condiciones)

Observamos que  $P \neq \emptyset$  pues  $g \in P$ .

$P$  se puede ordenar de la forma siguiente:  
Si  $h_1, h_2 \in P$ , diremos que

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$

Es "clínical" comprobar que la relación así definida,  $\leq$ , verifica las propiedades: reflexiva, antisimétrica y transitiva.

$(P, \leq)$  es, además, INDUCTIVO: Si  $Q \subset P$  está totalmente ordenado ( $\forall x, y \in Q$ , obten  $x \leq y$ , o bien  $y \leq x$ ), entonces  $Q$  tiene COTA SUPERIOR ( $\exists q_0 \in P: q \leq q_0, \forall q \in Q$ ).

Veamos que  $(P, \leq)$  es inductivo. Para ello, si:

$$Q = \{h_i, i \in I\} \subset P$$

es totalmente ordenado, entonces: el elemento de  $P$ ,  $q_0$ , definido como

$$q_0: D(q_0) = \bigcup D(h_i) \longrightarrow \mathbb{R} \quad q = q_0(x) =$$

IEI

$= h_i(x)$ , donde  $i \in I$  verifica  $x \in D(h_i)$ , es una cota superior de  $\alpha$ .

Pensemos que la única dificultad para probar esto es que  $x \in D(h_i) \cap D(h_j)$  para algún  $i \neq j$ ,  $i, j \in I$ ! Pero esto no es problema si tenemos en cuenta que  $\mathbb{Q}$  está totalmente ordenado y por tanto, o bien  $h_i \leq h_j$ , o bien  $h_j \leq h_i$ . Si, por ejemplo,  $h_i \leq h_j$  entonces  $D(h_i) \subset D(h_j)$  y  $h_j|_{D(h_i)} = h_i$ .

En consecuencia  $h_i(x) = h_j(x)$ . Si  $h_j \leq h_i$ , el razonamiento es similar.

RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN HASTA AHORA:  
El conjunto  $P$  definido en (4) es un CONJUNTO ORDENADO INDUCTIVO. El famoso LEMA DE ZORN afirma que  $P$  tiene algún ELEMENTO MAXIMAL, al que llamamos  $f$ . Este  $f$  cumple todas las conclusiones<sup>(3)</sup> del Teorema. En efecto, que  $f$  sea maximal significa:

$\nexists h \in P : f < h$  ( $f \leq h$  y  $f \neq h$ ) (5)

¡Terminemos la demostración! Para ello, probaremos que si  $D(f) = E$ , es decir  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $f$  cumple las propiedades (3).

Ahora bien H0 ES POSIBLE QUE

$$D(f) \subset E \neq \emptyset \quad (6)$$

En efecto, si (6) se cumpliría, entonces es posible "construir" un elemento  $h \in P$  t.q.

$$f < h$$

lo que contradice (5). ¡Definamos  $h$ ! Para ello, si (6) se cumple, entonces

$$\exists x_0 \in E \setminus D(f)$$

Sea  $D(h) = D(f) + \langle x_0 \rangle = \{x + t x_0, x \in D(f), t \in \mathbb{R}\}$ ,  $h: D(h) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x + t x_0) = f(x) + t \alpha$

donde  $\alpha$  debe elegirse para que

$$f(x) + t \alpha = h(x + t x_0) \leq p(x + t x_0), \forall x \in D(f), \forall t \in \mathbb{R} \quad (7)$$

En este caso,  $f < h$  (que contradice el hecho de que  $f$  es maximal).

Ahora bien,  $f(x) + t \alpha \leq p(x + t x_0)$

$$\uparrow$$

$$\alpha \leq \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t}, \forall t > 0, \forall x \in D(f)$$

$$\alpha' = \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t}$$

} (8)

$$\frac{P(x+tx_0) - f(x)}{t} \leq P(y+tx'_0) - f(y), \forall t < 0, \forall x \in D(f)$$

(8) de exemplo se  $y$  é dito se:

$$\frac{P(x+tx_0) - f(x)}{t} \leq \frac{P(y+tx'_0) - f(y)}{t'}, \forall x, y \in D(f) \quad \left. \begin{array}{l} \forall t < 0, \forall t' > 0 \\ (9) \end{array} \right\}$$

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq \frac{P(y+tx'_0)}{t'} - \frac{P(x+tx_0)}{t} \quad (10)$$

Ahora bien, como  $x, y \in D(f)$ ,  $\frac{y}{t'} - \frac{x}{t} \in D(f)$ .

Por tanto

$$f\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) \leq P\left(\frac{y}{t'} - \frac{x}{t}\right) = P\left(\frac{y}{t'} + x_0 - x_0 - \frac{x}{t}\right) =$$

$$= P\left[\frac{1}{t'}(y+tx'_0) + \frac{1}{-t}(x+tx_0)\right] \leq \quad (11)$$

$$\leq P\left[\frac{1}{t'}(y+tx'_0)\right] + P\left[\frac{-1}{t}(x+tx_0)\right] =$$

$$= \frac{P(y+tx'_0)}{t'} + \frac{P(x+tx_0)}{-t}.$$

Mirando el primero y el último teorema de la anterior cadena (11) de desigualdades, obtenemos (10).

Creo que, como en alguna ocasión anterior, deberíamos acabar con ¡uf! ¡Misión cumplida! Lo que sí nos merecemos es un RESUMEN DE LA DEMOSTRACIÓN, que, por cierto, es muy breve:

- ① Definición del conjunto  $P$ .
- ②  $P$  es un conjunto no vacío, ordenado e induutivo.
- ③ Por el Lema de Zorn,  $P$  tiene algún elemento maximal.
- ④ Dicho elemento maximal es el funcional buscado.

OBSERVACIÓN IMPORTANTE (Y, ADEMÁS, CURIOSA):  
El Teorema de Hahn-Banach lo enuncia y prueba en ambiente de ESPACIOS VECTORIALES (Si repasas el enunciado y demostración no verás la noción de espacio normado por mencionada). Si lo estudiaste sus principales

aplicaciones se tienen en espacios normados.  
Buena prueba de ello es el corolario siguiente,  
que en algunos textos se conoce con el nombre  
de "Teorema de Hahn-Banach".

COROLARIO 1. Sea  $(E, \|\cdot\|)$  normado,  $G \subset E$  un  
subespacio vectorial de  $E$  y  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y  
continua. Entonces existe  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ , lineal y  
continua  $t \cdot g$ .  $f|_G = g$  y  $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$ .

La demostración es "trivial", aplicando el Teorema  
de H-B para  $p: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \|g(x)\|_G$ ,  $\|x\|$ , donde

$$\|g\|_G = \sup_{x \in \overline{B}_G(0;1)} |g(x)|.$$

(No obstante, no te fíes de las trivialidades y  
haz una demostración completa del corolario).

OTRA OBSERVACIÓN IMPORTANTE: ya tenemos  
una forma de demostrar la existencia de  
"infinitas aplicaciones lineales y continuas,  
NO TRIVIALES DE  $E$  en  $\mathbb{R}$ , donde  $(E, \|\cdot\|)$  es  
un espacio normado de dimensión infinita".

En efecto,  $L^1(E, \mathbb{H} \cdot \mathbb{H})$  es un espacio normado de dimensión infinita, digamos cualquier subespacio vectorial  $G$ , de dimensión finita, de  $E$ . Definimos  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$  cualquier aplicación lineal<sup>notable</sup>, que por ser  $\dim G$  finita, es continua (¿habrás olvidado esto?). El corolario anterior nos "proporciona" una aplicación lineal  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$  continua, no trivial, que extiende a  $g$ .

Parece que "problema resuelto". No obstante, queremos que reflexiones sobre lo que expongo a continuación.

**Ejercicio 1.** Sea  $E = (C^1([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_0)$  y  $G$  el sub-espacio de  $E$  generado por la función  $\sin(x)$ .

- a) Demuestra que  $g: G \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto u'(0)$  es lineal y continua.
- b) Demuestra que  $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $u \mapsto u'(0)$  es lineal y no continua.
- c) ¿Cómo se explican los apartados a) y b) teniendo en cuenta el Corolario 1 anterior?

contarrencia del Teorema de H-B.

Ejercicio 2. Recordemos que si  $(E(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$  es un espacio normado de dimensión infinita, entonces los hiperplanos son o cerrados o densos. Sabemos que hay hiperplanos densos (¿Por qué?) Prueba que también existen hiperplanos cerrados.

Sugerencia: un hiperplano en  $E$  viene dado por  $\times E : f(x) = \alpha \}$  donde  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal, estrictamente cero y  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Debes recordar algunos resultados del tema anterior (operadores lineales).



H. Hahn  
(1879-1934)



S. Banach  
(1892-1945)

Alejo  
Noviembre 2021

~~Hilbert~~  
Matemáticas  
2021

## ESPACIOS DE HILBERT (un primer encuentro)

El uso de operadores en MECÁNICA CUÁNTICA motivó un desarrollo de los conceptos y resultados que venimos a concretar, destacando la axiomatización de los llamados "espacios de Hilbert", llevada a cabo por J.V. Neumann en 1.929 ("Mathematische Annalen, Vol. 102, 49-131, 370-427, 1.929-1.930"). Los "espacios de Hilbert" son "una generalización natural en dimensión infinita, de los espacios euclídeos  $\mathbb{R}^n$ ". Comencemos con la definición de PRODUCTO ESCALAR en un espacio vectorial real  $H$ .

Un producto escalar en  $H$  es una aplicación

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$$

que satisface:

- i)  $\langle f, f \rangle \geq 0, \forall f \in H; \langle f, f \rangle = 0 \iff f = 0$
- ii)  $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle, \forall f, g \in H$
- iii)  $\langle \alpha f + \beta g, h \rangle = \alpha \langle f, h \rangle + \beta \langle g, h \rangle, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$   
 $\forall f, g \in H$

Observamos que debido a las propiedades anteriores, la aplicación  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es bifuncional (La definición anterior es válida).

Mirando (2) con atención, vemos que en  $\mathbb{R}^n$  se puede definir la norma euclídea a partir del producto escalar. ¡Esto no es casualidad! De hecho, nuestro objetivo a continuación es demostrar que

El ejemplo más elemental es, quizás, el espacio euclídeo  $\mathbb{R}^n$  equipado con el producto escalar

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad (1)$$

Observamos que la norma euclídea en  $\mathbb{R}^n$ , es

$$\|x\|_2 = \langle x, x \rangle^{1/2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (*)$$

En los espacios de funciones  $L^2(a, b)$  (Hilbert), podemos definir el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad \forall f, g \in L^2(a, b) \quad (2)$$

En los espacios de sucesiones  $l_2$ , podemos definir el producto escalar como (Hilbert)

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n, \quad \forall (a_n), (b_n) \in l_2 \quad (3)$$

Ejercicio 1. Demuestra que (1), (2) y (3) son productos escalares en los espacios citados.

Mirando (\*) con atención, vemos que en  $\mathbb{R}^n$  se puede definir la norma euclídea a partir del producto escalar. ¡Esto no es casualidad! De hecho,

un producto escalar en  $H$  siempre da lugar a una norma en  $H$ , de tal forma que en cualquier espacio vectorial donde tengamos definido un producto escalar (llamado, en adelante, espacio PREHILBERTIANO), puede transformarse en un espacio normado.

Previamente, necesitamos probar una desigualdad, llamada desigualdad de Cauchy-Schwarz, que dirá interés la distancia. Hemos tratado anteriormente esta desigualdad en casos particulares:

$$\text{En } \mathbb{R}^n \quad \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{En } l_2 \quad \left| \sum_{i=1}^{+\infty} x_i y_i \right| \leq \left( \sum_{i=1}^{+\infty} x_i^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{i=1}^{+\infty} y_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\text{En } L^2(a,b) \quad \left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{1/2} \left( \int_a^b g^2(x) dx \right)^{1/2}$$

La primera de las tres, fue probada por Cauchy, en 1821. La tercera, para funciones, es conocida como "desigualdad de Bunyakovskii (1859)", probada también por Schwarz en 1884 (sin referencia al trabajo de Bunyakovskii) **IMISTERIOS HISTÓRICOS**

vicos sin resolver !

TEOREMA (Desigualdad de C-S).

Sea  $H(\mathbb{R})$ , dotado con un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

Entonces:

$$(C-S) \quad |\langle f, g \rangle| \leq \sqrt{\langle f, f \rangle} \sqrt{\langle g, g \rangle}, \quad \forall f, g \in H$$

Demonstración (en absoluto intuitiva).

Si  $f$  ó  $g$  son cero, (C-S) es trivial. Supongamos  $f \neq 0$ ,  $g \neq 0$  y consideremos la función

$$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \lambda \mapsto \langle f + \lambda g, f + \lambda g \rangle, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Como  $p(\lambda) = \langle g, g \rangle \lambda^2 + 2\langle f, g \rangle \lambda + \langle f, f \rangle$ ,  $p$  es un polinomio de segundo grado con "coeficiente líder" positivo ( $\langle g, g \rangle$ ). Por tanto

$\exists \min_{\lambda \in \mathbb{R}} g(\lambda)$  (interesante ejercicio para repasar algunos conceptos de funciones de 1 variable)

Si  $g(\lambda_0) = \min_{\lambda \in \mathbb{R}} g(\lambda)$ , entonces  $g'(\lambda_0) = 0$

$$\text{y } g(\lambda_0) = \langle f + \lambda_0 g, f + \lambda_0 g \rangle \geq 0.$$

$$\text{De } g'(\lambda_0) = 0 \text{ deducimos: } 2\langle g, g \rangle \lambda_0 + 2\langle f, g \rangle = 0,$$

por lo que  $\lambda_0 = -\frac{\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$ . Además,

$$0 \leq g(\lambda_0) = \langle g, g \rangle \lambda_0^2 + 2 \langle f, g \rangle \lambda_0 + \langle f, f \rangle =$$

$$= \langle g, g \rangle \frac{\langle f, g \rangle^2}{\langle g, g \rangle^2} + 2 \langle f, g \rangle \frac{-\langle f, g \rangle}{\langle g, g \rangle} + \langle f, f \rangle =$$

$$= \frac{\langle f, g \rangle^2 - 2 \langle f, g \rangle^2 + \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle}{\langle g, g \rangle}$$

Por tanto,  $\langle f, g \rangle^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle$ , de donde se deduce C-S.

Ejercicio 2. La igualdad de la en C-S  $\Leftrightarrow$  ¿?

Ejercicio 3. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio prehilbertiano. Prueba que

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \forall x \in H$$

define una norma en  $H$ . (4)

Ejercicio 4. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio prehilbertiano. Prueba la llamada "igualdad paralelogramo"

(I.P)  $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ ,  $\forall x, y \in H$ ,  
donde  $\|\cdot\|$  está definida en (4)

Ejercicio 5. Proporciona algún ejemplo de espacio normado tal que su norma no derive de un producto escalar (como en (4)).

(\*) Ejercicio 6. Prueba que si  $(E, \|\cdot\|)$  es un espacio normado donde se verifica la igualdad del paralelogramo (IP), entonces  $\|\cdot\|$  deriva de un producto escalar.

(¡ojo! Ejercicio con (\*)).

Ejercicio 7. Sea  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espacio prehilbertiano. Si  $H \times H$  está dotado de la topología producto, prueba que la aplicación  
 $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(f, g) \mapsto \langle f, g \rangle$

es continua.

Para poner en práctica los resultados contenidos en los ejercicios anteriores, puede ser bueno el siguiente ejercicio:

ejercicio siguiente.

Ejercicio 8. Dedice, razonadamente, cuáles de los espacios normados que siguen son espacios prehilbertianos.

a)  $\mathbb{R}^3$ ,  $\|x\| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$ ,  $\forall x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$

b)  $\bar{X} = C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\|f\|_0 = \max_{t \in [a, b]} |f(t)|$ ,  $\forall f \in \bar{X}$

c)  $\bar{X} = C([a, b], \mathbb{R})$ ,  $\|f\|_{L^1} = \int_a^b |f(t)| dt$ ,  $\forall f \in \bar{X}$

d)  $\bar{X} = \{ f \in C^1([a, b], \mathbb{R}) : f(a) = 0 \}$ ,  $\|f\| = \left[ \int_a^b |f'(t)|^2 dt \right]^{1/2}$ ,  $\forall f \in \bar{X}$

DEFINICIÓN IMPORTANTE (espacio de Hilbert)

Si  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio prehilbertiano, decimos que  $H$  es un ESPACIO DE HILBERT, si el espacio normado  $(H, \|\cdot\|)$ , con  $\|\cdot\|$  definida en (4), es completo.

Por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$ ,  $l_2$ ,  $L^2(a, b)$  con los productos escalares usuales (definidos más arriba), son espacios de Hilbert.

Ejercicio 9. Sea  $\mathcal{C}_{00}$  el espacio vectorial de "sucesiones casi nulas", con el producto escalar

$$\langle (a_n), (b_n) \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} a_m b_m, \forall (a_n), (b_n) \in \mathcal{C}_{00}$$

Demuestra que  $\mathcal{C}_{00}$  es un espacio prehilbertiano, pero no es un espacio de Hilbert.



J.V. Neumann  
1.903 - 1.957



H. Lebesgue  
1.875 - 1.941

*J. V. Neumann*  
*H. Lebesgue*  
Noviembre 2021

Ígualdad del Paralelogramo. Espacios prehilbertianos, espacios normados.

Nota

Noviembre 2022

Sabemos que si  $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  es un espacio prehilbertiano, entonces se verifica la I.P. (igualdad del paralelogramo). Recordemos que  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ ,  $\forall u \in H$

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2), \forall u, v \in H \quad (1)$$

El objeto de esta "nota docente" es probar el "recíproco", conocido como Teorema de Jordan-Von Neumann.

**TEOREMA.** Sea  $(H, \|\cdot\|)$  un espacio normado, t.q. se verifica (1). Entonces la norma de  $H$  deriva de un producto escalar.

Demostrarán.

En primer lugar, partimos que tenemos que "intuir" cuál puede ser el producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  que da lugar a  $\|\cdot\|$  en  $H$ .

Para ello, reasoningamos de la forma siguiente: Si en  $H$  damos un producto escalar, del que se obtiene  $\|\cdot\|$  de  $H$ , entonces

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (2)$$

$$\|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2 \quad (3)$$

Si calculamos (2) - (3), obtenemos:

$$4\langle x, y \rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \quad (4)$$

Conclusión: en aquellos espacios normados  $(H, \|\cdot\|)$  donde la norma derive de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , se cumple (4). Por tanto:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \quad (5)$$

Ahora bien, recordemos que el Teorema de Jordan - Von Neumann, que queremos probar, tiene como hipótesis:

$(H, \|\cdot\|)$  es un espacio normado que verifica I P. (1). ¡Todavía no tenemos, por tanto, un producto escalar del que derive la norma! No obstante, (5) nos marca el camino:

"Con las hipótesis del Teorema de Jordan-Von Neumann definimos

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] \quad (6)$$

¡OBJETIVO: Probar que (6) define un producto escalar! En este caso, ya habríamos acabado, puesto que:  $\langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} = \left( \frac{1}{4} [Y \|x\|^2] \right)^{\frac{1}{2}} = (\|x\|^2)^{\frac{1}{2}} = \|x\|$ .

¡Adelante con el objetivo! Aquí no tenemos que ser tan pretenciosos, sabiendo que el Objeto Leíraldo se paseaba con paciencia: "poco a poco", en diferentes etapas.

Hay 2 propiedades del producto escalar que han dividido el probar con la definición (6)

$$1) \langle x, x \rangle = \frac{1}{4} [\|2x\|^2 + 0] = \|x\|^2. \text{ Por tanto, } \langle x, x \rangle \geq 0 \text{ y } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$\begin{aligned} 2) \langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] = \\ &= \frac{1}{4} [\|y+x\|^2 - \|y-x\|^2] = \langle y, x \rangle \end{aligned}$$

3) ¿ $\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$ ? Esto es "haciendo el otro costado". Es peorado, pero también hay algún razonamiento "disertado". Para probar 3), proponemos las etapas:

$$3.1) \text{ ¿} \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x+z, 2y \rangle? \quad (7)$$

En efecto:

$$\langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle = \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + \frac{1}{4} [\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2] \quad (8)$$

A demás,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle x+z, 2y \rangle &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{4} [\|x+z+2y\|^2 - \|x+z-2y\|^2] \right] = \\ &= \frac{1}{8} \left[ \| \cancel{x+y} + \cancel{z+y} \|^2 - \| \cancel{x-y} + \cancel{z-y} \|^2 \right] = (\text{I.P. (1)}) \\ &= \frac{1}{8} [2\|u_1\|^2 + 2\|u_2\|^2 - \|u_1-u_2\|^2] - \frac{1}{8} [2\|u_3\|^2 + 2\|u_4\|^2 - \|u_3-u_4\|^2] \\ &= \cancel{\frac{1}{8} [2\|x+y\|^2 + 2\|z+y\|^2 - \|x-y\|^2]} - \cancel{\frac{1}{8} [2\|x-y\|^2 + 2\|z-y\|^2 - \|x-z\|^2]} \\ &= \frac{1}{4} [\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2] + \frac{1}{4} [\|z+y\|^2 - \|z-y\|^2] \end{aligned} \quad (9)$$

Vemos que (8) = (9). Por tanto, tenemos (7)

(3.2) Tomando  $z = 0$  en (7), tenemos:

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{2} \langle x, 2y \rangle \quad (10)$$

Por tanto,

$$\langle x+y, z \rangle = \frac{1}{2} \langle x+y, 2z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \quad (11)$$

$$\text{dado } x = y, \quad \langle 2x, z \rangle = 2 \langle x, z \rangle \quad (12)$$

Claramente, por inducción

$$\langle nx, z \rangle = n \langle x, z \rangle, \forall n \in \mathbb{N}, \forall x, z \in H \quad (13)$$

Además,  $\forall n \in \mathbb{Z}$ , de tiene:

$$\begin{aligned} \langle -nx, z \rangle &= \langle n(-x), z \rangle = n \langle -x, z \rangle = \\ &= n \frac{1}{q} [||-x+z||^2 - ||-x-z||^2] = (-n) \left[ \frac{1}{q} [||x+z||^2 - ||x-z||^2] \right] = \\ &= -n \langle x, z \rangle \end{aligned}$$

Así pues

$$\langle px, y \rangle = p \langle x, y \rangle, \forall p \in \mathbb{Z}, \forall x, y \in H \quad (14)$$

$$(3.3) \quad ? \langle \frac{p}{q} x, y \rangle = \frac{p}{q} \langle x, y \rangle ? \quad (15)$$

En efecto, de (14), tenemos:

$$\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, p \langle \frac{x}{p}, y \rangle = p \frac{1}{p} \langle x, y \rangle = \langle x, y \rangle$$

Luego

$$\langle \frac{x}{p}, y \rangle = \frac{1}{p} \langle x, y \rangle \quad (16)$$

Además, si  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$ , de tiene

$$\begin{aligned} \langle \frac{p}{q} x, y \rangle &\stackrel{(16)}{=} \frac{1}{q} \langle px, y \rangle \stackrel{(14)}{=} \frac{1}{q} p \langle x, y \rangle = \\ &= \frac{p}{q} \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

Por tanto,  $\langle s x_i y \rangle = s \langle x_i y \rangle$ ,  $\forall s \in \mathbb{R}$   
 $\forall x_i y \in H$  (17)

(3.4) ¿  $\langle rx_i y \rangle = r \langle x_i y \rangle$ ,  $\forall r \in \mathbb{R}$ ,  $\forall x_i y \in H$  ?

Sí, puesto que dado  $r \in \mathbb{R}$ ,  $\exists (r_n)$ , sucesión de números racionales t.q.  $r_n \rightarrow r$

Ahora bien,  $\langle x_i y \rangle$ , dado en (6) es una función continua en las variables  $x_i y$  (recordemos que la aplicación  $|| \cdot || : H \rightarrow \mathbb{R}$  es continua.)  
 $x \rightarrow ||x||$

Por tanto:

$$\langle rx_i y \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle (l_i - r_n)x_i y \rangle = l - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle r_n x_i y \rangle =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (l_i - r_n) \langle x_i y \rangle = r \langle x_i y \rangle \quad c.q.d.$$

¿ Dónde capaz de elaborar un resumen de las principales ideas de la demostración? ¡Ánimo!

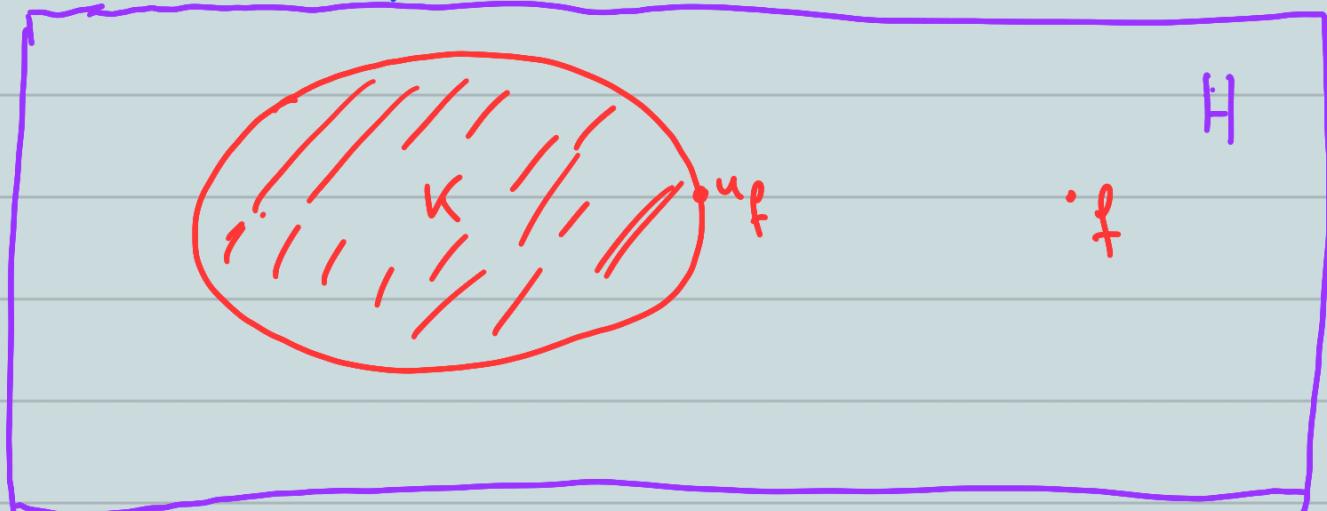
Alvaro  
Noviembre 2022

# TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL.

## DUAL DE UN ESPACIO DE HILBERT

*A Cáñad*  
Noviembre 2021

Comenzamos este tema con un resultado sobre "teoría de aproximación", donde, bajo ciertas hipótesis se prueba la existencia y unicidad de la "mejor aproximación" de un elemento  $f$ , perteneciente a un espacio de Hilbert  $H$ , sobre un subconjunto  $KCH$ , que cumple algunas propiedades adicionales. El resultado es de interés, incluso cuando la dimensión de  $H$  es finita.



TEOREMA 1 (De la proyección sobre un convexo cerrado)

Sea  $H$  un espacio de Hilbert (real),  $KCH$ ,  $K$  convexo, cerrado y no vacío. Entonces,

$\forall f \in H \exists k \in K \text{ s.t. } \|f - k\| \leq \|f - x\| \quad \forall x \in K$

$\forall f \in H, \exists: u_f \in K : d(f, u_f) = d(f, K)$ .

Además,  $u_f$  se caracteriza por las dos propiedades siguientes:

$$i) u_f \in K$$

$$ii) \langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K.$$

Finalmente, si  $P_K: H \rightarrow H$

$$f \mapsto u_f$$

entonces  $P_K$  es lipschitziana, con constante de Lipschitz uno; es decir  $P_K$  es "no expansiva"

$$\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|, \forall f_1, f_2 \in H$$

Demostración. Se realiza en cuatro etapas:

### ① Existencia de $u_f$ .

Recordemos que  $d(f, K) = \inf_{v \in K} d(f, v)$ . Partiendo,

por definición de infimo,  $\exists (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$  t.q.

$$d(f, v_n) \rightarrow d(f, K) \equiv D \geq 0. \quad (1)$$

Objetivo: demostrar que  $(v_n)$  es una sucesión de Cauchy en  $H$ . Para ello, apliquemos la igualdad del paralelogramo a los vectores  $f - v_m, f - v_n$  obteniendo:

$$\|f - v_n + f - v_m\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2]$$

Ahí,

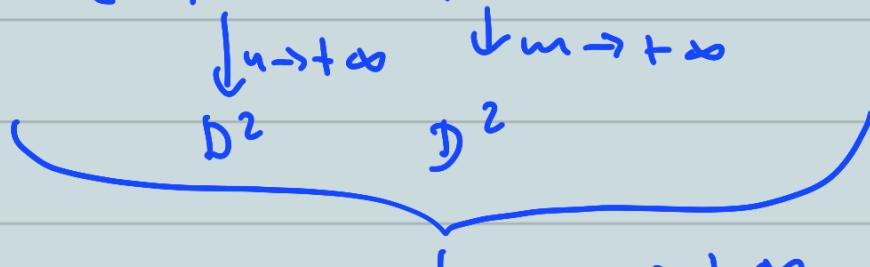
$$\begin{aligned} \|v_n - v_m\|^2 &= 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2 - \|2f - (v_n + v_m)\|^2] \\ &= 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2] - 4\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 \end{aligned}$$

Ahora bien,  $\frac{v_n + v_m}{2} = \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2}v_m$ , luego como  $K$

es convexo,  $\frac{v_n + v_m}{2} \in K$  y por tanto,

$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 = [d(f, \frac{v_n + v_m}{2})]^2 \geq D^2. \quad \text{Además,}$$

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2[\|f - v_n\|^2 + \|f - v_m\|^2] - 4D^2$$



Por tanto  $\|v_n - v_m\| \xrightarrow{n,m \rightarrow +\infty} 0$ , lo que implica que  $(v_n)$  es una sucesión de Cauchy en  $H$ .

Como  $H$  es completo,  $\exists v \in H$  t. q.  $(v_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} v$ . Como  $K$  es cerrado,  $v \in K$ .

Finalmente, como  $d(\cdot, \cdot): H \times H \rightarrow \mathbb{R}$

$$(x, y) \mapsto d(x, y)$$

es continua, valiendo a (1), concluimos que

$$d(f, v) = d(f, K) = D$$

## ② Caracterización de $u_f$ .

$$\left. \begin{array}{l} u_f \in K \\ d(f, u_f) = d(f, K) = D \end{array} \right\} \iff \left. \begin{array}{l} u_f \in K \\ \langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K \end{array} \right\}$$

Demostración.

$\Rightarrow)$  Sea  $v \in K$ ,  $w = (1-t)u_f + tv$ ,  $t \in (0, 1)$

Por ser  $K$  convexo,  $w \in K$ , luego:

$$\begin{aligned} \|f - u_f\|^2 &\leq \|f - w\|^2 = \|f - (1-t)u_f - tv\|^2 = \\ &= \langle f - u_f - t(v - u_f), f - u_f - t(v - u_f) \rangle = \\ &= \|f - u_f\|^2 - 2t \langle f - u_f, v - u_f \rangle + t^2 \|v - u_f\|^2. \text{ Por tanto} \\ 2t \langle f - u_f, v - u_f \rangle &\leq t^2 \|v - u_f\|^2. \end{aligned}$$

Si  $t \rightarrow 0^+$ , obtenemos  $\langle f - u_f, v - u_f \rangle \leq 0, \forall v \in K$

$\Leftarrow)$  Si  $v \in K$ , entonces:

$$\begin{aligned} \|f - u_f\|^2 - \|f - v\|^2 &= \langle f - u_f, f - u_f \rangle - \langle f - v, f - v \rangle = \\ &= \cancel{\langle f, f \rangle} - 2 \langle f, u_f \rangle + \langle u_f, u_f \rangle - \cancel{\langle f, f \rangle} + 2 \langle f, v \rangle - \cancel{\langle v, v \rangle} \end{aligned} \quad (2)$$

También,

$$2 \underbrace{\langle f - u_f, v - u_f \rangle}_{\leq 0 \text{ por hipótesis}} - \underbrace{\langle u_f - v, u_f - v \rangle}_{\leq 0} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 2\langle f, v \rangle - 2\langle f, u_f \rangle - 2\cancel{\langle u_f, v \rangle} + \cancel{2\langle u_f, u_f \rangle} \\
 &- \cancel{\langle u_f, u_f \rangle} + 2\cancel{\langle u_f, v \rangle} - \langle v, v \rangle = \\
 &= 2\langle f, v \rangle - 2\langle f, u_f \rangle + \cancel{\langle u_f, u_f \rangle} - \langle v, v \rangle = (3)
 \end{aligned}$$

En conclusión

$$\begin{aligned}
 \|f - u_f\|^2 - \|f - v\|^2 &= (2) = (3) \leq 0. \text{ Luego} \\
 \|f - u_f\|^2 &\leq \|f - v\|^2, \forall v \in K,
 \end{aligned}$$

por lo que

$$d(f, u_f) = \|f - u_f\| = d(f, K).$$

### (3) unicidad de $u_f$ .

Sean  $u_f^1, u_f^2$  verificando (\*). Entonces:

$$\langle f - u_f^1, v - u_f^1 \rangle \leq 0, \langle f - u_f^2, v - u_f^2 \rangle \leq 0, \forall v \in K$$

Luego

$$\underbrace{\langle f - u_f^1, u_f^2 - u_f^1 \rangle}_{(4)} \leq 0, \underbrace{\langle f - u_f^2, u_f^1 - u_f^2 \rangle}_{(5)} \leq 0$$

Por tanto  $(4) + (5) \leq 0$ . Desarrollando, tenemos

$$\cancel{\langle f, u_f^2 - u_f^1 \rangle} - \cancel{\langle u_f^1, u_f^2 - u_f^1 \rangle} + \cancel{\langle f, u_f^1 - u_f^2 \rangle} - \cancel{\langle u_f^2, u_f^1 - u_f^2 \rangle} \leq 0$$

De la,  $\underbrace{\langle u_f^1, u_f^1 - u_f^2 \rangle}_{\|u_f^1 - u_f^2\|^2} - \underbrace{\langle u_f^2, u_f^1 - u_f^2 \rangle}_{\|u_f^1 - u_f^2\|^2} \leq 0$

$$\langle u_f - u_{f'} , u_f - u_{f'} \rangle \leq 0$$

$$\|u_f^1 - u_f^2\|^2 \leq 0$$

↓  
 $u_f^1 = u_f^2$

④ Propiedades de  $P_K : H \rightarrow H$ ,  $f \mapsto u_f$ .  
 Sean  $P_K(f_1) = u_{f_1}$ ,  $P_K(f_2) = u_{f_2}$ , entonces,  
 por la caracterización previa:

$$\underbrace{\langle f_1 - u_{f_1}, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{\leq 0} + \underbrace{\langle f_2 - u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{\leq 0} \stackrel{EK}{\leq} 0$$

Luego:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\langle f_2, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{c)} + \underbrace{\langle u_{f_1}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{a)} - \underbrace{\langle f_2, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle}_{d)} \\ & - \underbrace{\langle u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{b)} \stackrel{c) + a) - d) - b) \leq 0}{\downarrow} \\ & a) - b) \leq d) - c) \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{aligned} & \underbrace{\langle u_{f_1} - u_{f_2}, u_{f_1} - u_{f_2} \rangle}_{\parallel} \leq \langle f_2 - f_1, u_{f_2} - u_{f_1} \rangle \stackrel{CS}{\leq} \\ & \|u_{f_1} - u_{f_2}\|^2 \leq \|f_1 - f_2\| \|u_{f_2} - u_{f_1}\| \end{aligned}$$

Por tanto:

$$\|u_{f_1} - u_{f_2}\| \leq \|f_1 - f_2\|, \quad \forall f_1, f_2 \in H$$

iuf!

Comentario personal: la demostración de este Teorema es un latazo. Pero las aplicaciones son "innovadoras" e "importantes", como veremos a continuación. Por ejemplo:

TEOREMA 2 (De la proyección ortogonal).

Sea  $K$  un subespacio vectorial cerrado de un espacio de Hilbert  $H$ . Entonces

$$H = K \oplus K^\perp \quad (6)$$

donde  $K^\perp = \{ h \in H : \langle h, x \rangle = 0, \forall x \in K \}$ .

Además, las proyecciones de  $H$  sobre  $K$  y  $K^\perp$  dan

Mota importante: (6) significa que

$\forall h \in H$ ,  $h = h_1 + h_2$ ,  $h_1 \in K$ ,  $h_2 \in K^\perp$ , de manera única. Además, las proyecciones  $H \rightarrow K$ ,  $h \mapsto h_1$ ;  $H \rightarrow K^\perp$ ,  $h \mapsto h_2$  son continuas.

Demostración. Sea  $P_K : H \rightarrow K$ , la aplicación definida en el Teorema anterior. Sabemos que

$$\|h - P_K h\|^2 = \|P_K h\|^2 \leq 0 \quad \forall h \in H \quad \text{y} \quad h \in K \quad \text{luego}$$

Como  $K$  es, ahora, un subespacio cerrado de  $H$ ,  
 $(\forall k \in K \Rightarrow t k \in K, \forall t \in \mathbb{R})$ , obtenemos

$$\langle f - P_K f, t v - P_K f \rangle \leq 0, \forall f \in H, \forall v \in K, \forall t \in \mathbb{R}$$

Luego implica

$$t \underbrace{\langle f - P_K f, v \rangle}_{\text{Fijamos } f, v} \leq \langle f - P_K f, P_K f \rangle, \forall f \in H, \forall v \in K, \forall t \in \mathbb{R}$$

Fijamos  $f, v$

¿Trivialmente? la igualdad anterior implica

$$\langle f - P_K f, v \rangle = 0, \forall f \in H, \forall v \in K \quad (7)$$

¿Por qué?

$$\text{Ahí, } f = (P_K f) + (f - P_K f) \in K + K^\perp \quad (8)$$

Además  $K \cap K^\perp = \{0\}$  (¿Por qué?)

Luego

$$H = K \oplus K^\perp$$

Además,  $P_K : H \rightarrow K$  es lineal. En efecto,  
no os perdáis la demostración que es curiosa:

Sabemos que si  $f_1, f_2 \in H$ , entonces:

$$\langle f_1 - P_K f_1, v \rangle = 0, \forall v \in K \}$$

$$\langle f_2 - P_K f_2, v \rangle = 0, \forall v \in K \}$$

Por tanto,

$$\langle f_1 + f_2 - (P_K f_1 + P_K f_2), v \rangle = 0, \forall v \in K \quad (9)$$

Pero, no olvidemos que al ser  $K$  un subespacio vectorial cerrado, (9) caracteriza a  $P_K(f_1 + f_2)$  (véase (7)). Luego

$$P_K(f_1 + f_2) = P_K(f_1) + P_K(f_2)$$

¿Por qué? Es posible que, a estas alturas, estéis sintiendo la necesidad impetuosa de asistir a clase (¡túmica deberíais haberlo dejado!)

Análogamente, si  $f \in H$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ , entonces  $\langle f - P_K f, v \rangle = 0, \forall v \in K$ , lo que implica

$$\langle \lambda f - P_K f, v \rangle = 0, \forall v \in K$$

Nuevamente (véase, otra vez (7)), esto implica

$$P_K(\lambda f) = \lambda P_K(f), \forall f \in H, \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

En conclusión:  $P_K$  es lineal.

Finalmente:  $\forall f \in H$  se tiene

$$f = \underbrace{P_K f}_K + \underbrace{(f - P_K f)}_{K^\perp} \in u + v, u \in K, v \in K^\perp$$

Como  $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \langle u+v, u+v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$   
tenemos que  $\|u\| \leq \|f\|$ ;  $\|v\| \leq \|f\|$ , lo que  
implica:

$$\|P_K f\| \leq \|f\|, \quad \|(I-P_K)(f)\| \leq \|f\|, \quad \forall f \in H \quad (10)$$

Como  $P_K : H \rightarrow H$ ,  $(I-P_K) : H \rightarrow H$ ,  
son aplicaciones lineales, (10) implica que  
son continuas (¿habías olvidado esto? ¡Demuéstralo  
pronto!)

Los dos ejercicios que siguen están propues-  
tos en ambientes "elementales":  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R}^2$ ,  
pero pueden contribuir a entender los  
teoremas 1 y 2, anteriores.

Ejercicio 1. Calcúlese la "mejor aproximación" para  
 $H = \mathbb{R}$ ,  $\langle x, y \rangle = xy$  (producto usual en  $\mathbb{R}$ )

$$K = [a, b] \cup [c, d], \quad a < b < c < d$$

( $H$  Hilbert,  $K$  cerrado no convexo)

Ejercicio 2.  $H = \mathbb{R}$ ,  $\langle x, y \rangle = xy$ ,  $K = (a, b)$

( $H$  Hilbert,  $K$  convexo, no cerrado)

Ejercicio 3.  $H = \mathbb{R}^2$ ,  $\|x\| = \|(x_1, x_2)\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}$

$$K = [0, 1] \times [0, 1]$$

( $H$  no Hilbert,  $K$  convexo, cerrado)

MOTA: Si  $(\bar{X}, \|\cdot\|)$  es normado,  $K \subset \bar{X}$ , entonces dado  $f \in \bar{X}$ , decimos que  $u_f$  es "una mejor aproximación de  $f$  en  $K"$  si

$$\begin{cases} u_f \in K \\ d(f, u_f) = d(f, K) \end{cases}$$

Los ejercicios anteriores dicen que  $u_f$  puede existir o no, y en caso de que exista, puede no ser única. Los Teoremas 1 y 2, "ponen las cosas en su sitio" para  $\bar{X}$  Hilbert y  $K$  convexo y cerrado.

## DUAL DE UN ESPACIO DE HILBERT

Recordemos: dado  $H$ , espacio de Hilbert respecto de un producto escalar  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ,  $H$  es un espacio normado ( $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ ,  $\forall x \in H$ ). Por tanto, tiene sentido definir:

a) El espacio "dual algebraico de  $H$ ":

$$H^{\#} = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal} \}$$

b) El espacio "dual topológico" de  $H$ :

$$H' = H^* = \{ f: H \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es lineal y } \underline{\text{continua}} \}$$

La tenemos que  $H' = H^* \subset H^{\#}$  y que  
 $H' = H^* = H^{\#} \Leftrightarrow \dim H \text{ es finita.}$

El Teorema que sigue nos dice que si  $H$  es un espacio de Hilbert,  $H' = H$ . El sentido que tiene la expresión  $H' = H$  se explica en el mismo Teorema.

TEOREMA (De representación de Riesz-Fréchet, sobre el dual de un espacio de Hilbert).

Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Entonces,

$$\forall f \in H' \exists ! v_f \in H : f(x) = \langle v_f, x \rangle, \forall x \in H.$$

Además

$$\|f\|_{H'} = \|v_f\|_H$$

} (11)

Demostración:

$$\text{Si } f = 0, \nabla f = 0$$

Sea  $f \neq 0$ ,  $\ker f = \{u \in H : f(u) = 0\}$  es un subespacio vectorial cerrado de  $H$ . Luego, por el Teorema anterior

$$H = \ker f \oplus (\ker f)^\perp$$

Afirmo

$$\exists x \in (\ker f)^\perp : f(x) = 1 \quad (*)$$

(Demostración de  $(*)$ ): Como  $f \neq 0 \Rightarrow \ker f \subsetneq H$   
 $\Rightarrow \exists z \in (\ker f)^\perp : f(z) \neq 0$ . Entonces  
 $f\left(\frac{z}{f(z)}\right) = 1$ . Así, podemos tomar  $w = \frac{z}{f(z)}$ .

Leguimos; Si  $(*)$  está demostrado, entonces:

$$\forall x \in H, x - f(x)w \in \ker f \quad (\text{pues } f(x - f(x)w) = \\ = f(x) - f(x)f(w) = f(x) - f(x) = 0)$$

Por tanto  $\begin{cases} x - f(x)w \in \ker f \\ w \in (\ker f)^\perp \end{cases}$

Luego  $\langle x - f(x)w, w \rangle = 0, \forall x \in H$

$$\langle x, w \rangle - f(x)\langle w, w \rangle$$

En conclusión,

$$f(x) = \frac{\langle x, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \left\langle x, \frac{w}{\|w\|^2} \right\rangle, \quad \forall x \in H$$

de la  $v_f = \frac{w}{\|w\|^2}$ , entonces

$$f(x) = \langle x, v_f \rangle, \quad \forall x \in H$$

Además,  $|f(x)| \leq \|x\| \|v_f\|$ ,  $\forall x \in H$

Esto implica  $\|f\|_{H^*} \leq \|v_f\|$  (12)

Además, como  $\frac{v_f}{\|v_f\|} \in \{u \in H; \|u\|=1\}$

y  $f\left(\frac{v_f}{\|v_f\|}\right) = \left\langle \frac{v_f}{\|v_f\|}, v_f \right\rangle = \|v_f\|$ , tenemos

$$\text{que } \|f\|_{H^*} \geq \|v_f\| (13)$$

Finalmente, (12) y (13) implican  $\|f\|_{H^*} = \|v_f\|$

Algunos comentarios:

1) Como  $\forall v \in H$ ,  $v$  fijo, la aplicación

$$H \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, v \rangle \quad (14)$$

es lineal y continua, el Teorema anterior nos dice que todos los elementos de  $H'$  son de la forma (14). Como se cumple (11), la aplicación

$$H' \rightarrow H$$

$$f \mapsto v_f$$

(donde  $v_f$  es el dado por el Teorema)

es lineal, continua, biyectiva y "conserva la norma". Luego  $H'$  y  $H$  son "idénticos" como espacios de Banach. Esto nos permite afirmar:

"El dual topológico de  $\mathbb{R}^n$ , con la norma euclídea es  $\mathbb{R}^n$ "

"El dual topológico de  $\ell_2$ , con la norma usual, es  $\ell_2$ "

"El dual topológico de  $L^2(a,b)$ , con la norma usual, es  $L^2(a,b)$ ", etc.

Ejercicio 4. Si  $1 \leq p \leq +\infty$ , probar que la norma

usual en  $L_p(a,b)$  proviene de un producto escalar si y solamente si  $p=2$ .

Ejercicio 5. Aplica el Teorema de la proyección ortogonal al caso:

$$H = L^2(0, 2\pi), K = \left\{ f \in L^2(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} f(x) dx = 0 \right\},$$

encontrando la "mejor aproximación en  $K$ " de las funciones de la forma:  $\lambda \cos^2(\pi x)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$

Ejercicio 6. Considerese el espacio  $H = (C_00, \langle \cdot, \cdot \rangle)$

donde

$$\langle (x_n), (y_n) \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n$$

Demuéstrese que el operador lineal

$$f: H \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$$

es continuo y que  $\forall v \in H$  t. q.

$$f((x_n)) = \langle v, (x_n) \rangle, \quad \forall (x_n) \in H \quad (*)$$

En relación con el Teorema de Riesz-Fréchet, ¿qué condición de tiene?

Lí de justifica  $H = (C_00, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  por  $l_2$ , con

el producto escalar usual, demuéstrele que  
 $f: l_2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f((x_n)) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{n}$ , es lineal y continuo.

¿De cumple ahora \*? ¿Suicín es  $\vee$ ?

Ejercicio 7. Sea  $\bar{X} = \{ f \in C^2([0,1], \mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0 \}$   
 ¿Es  $\bar{X}$  con la norma  $\|f\| = \left( \int_0^1 |f''(t)|^2 dt \right)^{1/2}$   
 un espacio prehilbertiano?

Escríbase el producto escalar del que deriva la  
 norma anterior.

Ejercicio 8. Considerarse el espacio vectorial  
 $l_2$ , con el producto escalar :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n y_n}{n}$$

Prueba que, con la norma derivada del producto escalar anterior, la sucesión :

$$\bar{x}^1 = (1, 0, 0, \dots)$$

$$\bar{x}^2 = \left( 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \dots \right)$$

-----

$$\bar{x}^k = \left( 1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{k}}, 0, 0, \dots \right)$$

es de Cauchy, no convergente.

Ejercicio 9. Sea  $P_n$  el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que  $n$ , con el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad \forall p, q \in P_n.$$

Prueba que si  $L : P_n \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal, entonces  $L$  es continua.

Prueba que si  $a < b$  son números reales dados, entonces  $\exists! p \in P_n$  t. q.

$$\int_a^b q(t)dt = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt, \quad \forall q \in P_n$$

Ejercicio 10. Sea  $(\gamma_n)$  una sucesión de reales t.q.  $\gamma_n \in (0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Trivialmente  $+\infty$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n x_n y_n$$

es un producto escalar en  $l_2$ . Demuestra que si la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n$  es convergente,

entonces  $l_2$  con la norma derivada del mapeo

rior producto escalar, no es completo.

Ejercicio 11. Sea  $P$  el espacio vectorial de los polinomios reales en una variable, definidos en  $[a, b]$  ( $a < b$ , fijos), con el producto escalar

$$\langle p, q \rangle = \int_a^b p(t)q(t) dt$$

Proporciona un ejemplo de  $L: P \rightarrow \mathbb{R}$  lineal y continuo, para el que no se cumpla el Teorema del Riesz-Fréchet. ¿Qué conclusión se obtiene sobre  $(P, \| \cdot \|)$ , donde  $\| \cdot \|$  es la norma derivada del anterior producto escalar?

Ejercicio 12. Sea  $Q_n$  el espacio vectorial de polinomios de una variable real, definidos en  $[a, b]$  y de grado  $\leq n$ . Demuestra que

$$\forall f \in L^2(a, b), \exists! p_f \in Q_n \text{ t. q.}$$

$$\| f - p_f \|_2 \leq \| f - p \|_2, \quad \forall p \in Q_n.$$

Nuria

November 2021



F. Riesz  
1.880 - 1.956



M. Fréchet  
1.878 - 1.973

LEMA DE BAIRE. APLICACIONES: T. de Banach-Steinhaus, T. Gráfica cerrada, T. Aplicación abierta

~~Yáñez~~ Diciembre 2022

MOTIVACIÓN: El Teorema siguiente es bien conocido:

TEOREMA (Convergencia uniforme e integración)

Sea  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una sucesión de funciones continuas tales que  $(f_n) \rightarrow f$ , uniformemente en  $[a, b]$ . Entonces

$$f \text{ es continua en } [a, b] \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx \quad (1)$$

Existe la versión similar para series de funciones:

Si  $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  es una sucesión de funciones continuas t.q. la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  converge uniformemente en  $[a, b]$ , entonces:

la función  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  es continua en  $[a, b]$  y

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b f_n(x) dx \quad (2)$$

Motivado por este resultado, W. Osgood escribió en 1897, un artículo titulado:

"Nonuniform convergence and the integration of series term by term", donde intentaba probar una hipótesis más débil que la convergencia uniforme de la serie  $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$  en  $[a, b]$ ,

aunque manteniendo la condición de "integración término a término".

En el desarrollo de dicho artículo, Osgood probó el siguiente resultado:

"Si  $(O_n)$  es una sucesión de abiertos, densos en  $\mathbb{R}$ , entonces  $\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n$  es un subconjunto denso en  $\mathbb{R}$ "

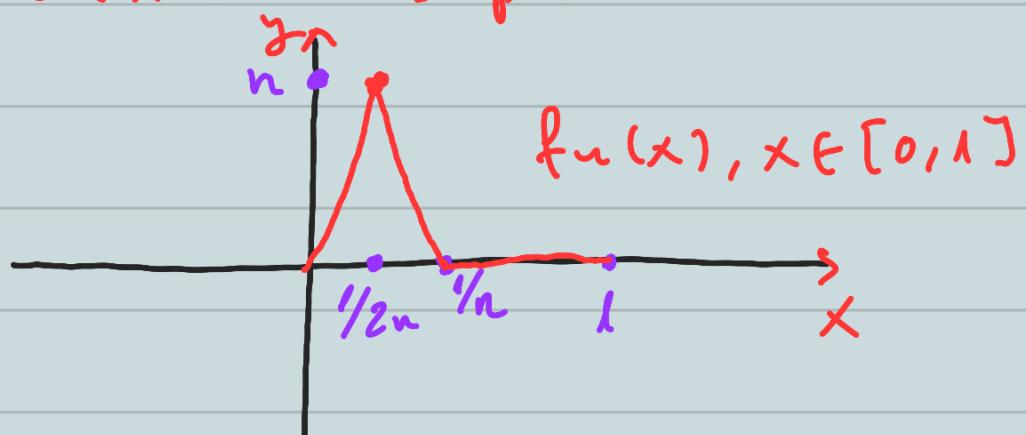
En 1.899, R. Baire probó un resultado idéntico en  $\mathbb{R}^m$ .

Finalmente, en 1.927, S. Banach y H. Steinhaus, probaron la versión definitiva en un gran espacio métrico completo.

Este es el tema de esta "nota docente", donde se incluyen, además, divertidas aplicaciones.

Ejercicio 1. Muestra que la intersección de un número infinito de abiertos de  $\mathbb{R}$ , no es necesariamente abierto.

Ejercicio 2. Considera la sucesión de funciones cuyas gráficas están dadas por



Demuestra que  $\forall x \in [0, 1]$ ,  $f_n(x) \rightarrow 0$ , pero que, sin embargo

$$\int_0^1 f_n(x) dx \not\rightarrow \int_0^1 0 dx = 0$$

Demostaremos en esta nota docente los dos Teoremas que siguen y, además, que son equivalentes.

### TEOREMA 1 (Lema de Baire)

Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de cerrados t.q.  $\text{int}(M_n) = \emptyset$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  ( $\text{int}(M_n) = M_n$ , interior topológico de  $M_n$ ).

Entonces  $\text{int} \left( \bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n \right) = \emptyset$ .

TEOREMA 2. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de abiertos, densos en  $E$ . Entonces:

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} O_n \text{ es denso en } E.$$

Ejercicio 3. Demuestra que

$$\text{Teorema 1} \Rightarrow \text{Teorema 2}$$

Ejercicio 4. Demuestra que

$$\text{Teorema 2} \Rightarrow \text{Teorema 1}$$

Ejercicio 5. Sea  $(E, d)$  un espacio métrico completo y  $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$  una sucesión de cerrados tales que  $\bigcup_{n=1}^{+\infty} M_n = E$ .

Entonces  $\exists n \in \mathbb{N}: M_n \neq \emptyset$ .

Ejercicio 6. Encuentra el error del siguiente razonamiento:

Sea  $\Sigma = \{x_1, x_2\}$ ,  $x_1 \neq x_2$  y  $d: \Sigma \times \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$   
la distancia "discreta", es decir:

$$d(x_1, x_1) = d(x_2, x_2) = 0, \quad d(x_1, x_2) = d(x_2, x_1) = 1.$$

Entonces:

a)  $(\Sigma, d)$  es completo.

b)  $M_1 = \{x_1\}$ ,  $M_2 = \{x_2\}$  son cerrados con interior vacío.

c)  $\Sigma = M_1 \cup M_2$  no tiene interior vacío.

Ejercicio 7. Prueba que si  $(\Sigma, \|\cdot\|)$  es un espacio de Banach, entonces la dimensión de  $\Sigma$  es o finita o infinita NO NUMERABLE.  
¿Es necesaria la hipótesis  $(\Sigma, \|\cdot\|)$  Banach?

*J. Llinares* Diciembre 2022

## BIBLIOGRAFÍA

Bachman, G. y Narici, L. Análisis Funcional -  
Tecnos, 1.981.

Brezis, H. Functional Analysis, Sobolev spaces and  
Partial Differential Equations. Springer, 2011.

Hutson, V. y Pyne, J.S. Applications of Functional  
Analysis and Operator Theory. Academic Press, 1.980

Lusternik, L. y Sobolev, V. Elements of Functional  
Analysis. Frederick Ungar Publishing Company,  
1.961

Encyclopedia of Mathematics

[https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main\\_Page](https://encyclopediaofmath.org/wiki/Main_Page)

MacTutor <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk>