ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO 2015/16

1. Sea A un subconjunto de un espacio prehilbertiano. Pruébese que si A es ortogonal y no contiene al vector cero, entonces A es linealmente independiente.

2. Sean $x, y \in H$, siendo H un espacio prehilbertiano , $y \neq 0$. Entonces
$$\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$$
si y solamente si $x = \alpha y$ para algún número real $\alpha \geq 0$.

3. Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones de Cauchy en un espacio prehilbertiano H. Pruébese que que la sucesión de números reales $\{< x_n, y_n >\}$ es convergente.

4. Sea H un espacio prehilbertiano y $\{e_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión ortonormal. Pruébese que si $f \in H$ y $\alpha_n =< e_n, f >,\ \forall\ n \in \mathbf{N}$, entonces para cualesquiera números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, se tiene
$$\|f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j - \alpha_j|^2$$
Interprétese la relación anterior en términos de "teoría de aproximación".

5. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Pruébese que H es isomorfo a l_2.

6. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana). Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

7. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <, >)$, donde
$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ \forall\ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ es continuo y que no existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) = < z, \{x_n\} >, \ \forall \ \{x_n\} \in H.$$

En relación con el Teorema de Riesz-Frèchet, ¿qué conclusión se obtiene?

8. Sea P_n el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que n, con el producto escalar

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t) \ dt, \ \forall \ p, q \in P_n$$

Pruébese que existe un único $p \in P_n$ tal que

$$\int_{-1}^0 q(t) \ dt = \int_0^1 p(t)q(t) \ dt, \ \forall \ q \in P_n$$

Calcúlese p para $n = 2$.

9. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Demuéstrese que no existe ningún subconjunto $\mathcal{A} \subset H$ que cumpla la propiedad siguiente:

“Cualquier elemento de H es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{A}$”

Interprétese el resultado en términos de bases de Hamel.

10. Considérese el espacio prehilbertiano $X = C([-\pi, \pi], \mathbf{R})$ con el producto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} fg$. Si $L : X \to X$ se define como

$$(Lf)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s - t)f(t) \ dt,$$

pruébese que L es simétrico y compacto. Determínense los valores propios de L.