ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO 2015/16

1. Sea X un espacio normado. Para $x \in X$ y $r > 0$, pruébese

   (a) $\overline{B}(x;r) = \overline{B(x;r)}$

   (b) $B(x;r) = int(\overline{B}(x;r))$

2. Sea $X = (C[0,1], \mathbf{R})$. Demuéstrese que la norma uniforme $\|\cdot\|_0$ y la norma definida como $\|u\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |u(t)|\ dt,\ \forall\ u \in X$, no son equivalentes. ¿Qué conclusión se obtiene sobre la dimensión de X?

3. Sea $X = \mathrm{l}_2$ con la norma usual y $\{e^n\}$ la sucesión de elementos canónicos. Sea E el subespacio vectorial de X generado por la sucesión$\{e^n\}$. Demuéstrese que E no es cerrado.

4. (a) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_∞ pero no en l_1 ni en l_2.

   (b) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_2 pero no en l_1.

   (c) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en c_0 pero no en l_2

5. Sea $X = \{u : [0,1] \to \mathbf{R} : u \text{ es continua}, u(0) = 0\}$ con la norma uniforme $\|\cdot\|_0$ y el funcional $L : X \to \mathbf{R}$ definido como $L(u) = \int_0^1 u(t)\ dt,\ \forall\ u \in X$. Demuéstrese que L es lineal y continuo. Calcúlese la norma de L en X^* ¿Se alcanza dicha norma?

6. Considérese el espacio normado l_2 con la norma usual y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión dada de números reales.

   (a) Encuéntrese una condición necesaria y suficiente sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$ para que el operador (lineal) $A(\{x_n\}) = \{\lambda_n x_n\}$ esté bien definido de l_2 en l_2.

   (b) Encuéntrese una condición necesaria y suficiente sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$ para que el operador (lineal) $A(\{x_n\}) = \{\lambda_n x_n\}$ esté bien definido de l_2 en l_2 y sea continuo. En este caso, ¿se alcanza siempre la norma de dicho operador?

7. Sea X un espacio normado, $X^\sharp$ el dual algebraico y $L \in X^\sharp$. Demuéstrese que $L \in X^*$ (dual topológico) si y solamente si el núcleo de L es cerrado.

8. Si X es un espacio normado, $L \in X^\sharp$ (L no idénticamente cero) y $\alpha \in \mathbf{R}$ se define el hiperplano $H(L, \alpha)$ como

$$H(L, \alpha) = \{x \in X : L(x) = \alpha\}$$

Demuéstrese que cualquier hiperplano en X es o cerrado o denso. ¿Qué particularidades tiene este resultado si la dimensión de X es finita?

9. Considérense los espacios l_1 y l_∞ con las normas usuales. Demostrar que la aplicación $\mathrm{l}_\infty \to \mathrm{l}_1^*$, $y = \{y_k\} \to y^*$, definida como $y^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$, $\forall x = \{x_k\} \in \mathrm{l}_1$ define una isometría lineal de l_∞ sobre l_1^*.

10. Sea $X = C[0,1]$ con la norma uniforme. Pruébese que los operadores lineales siguientes $T : X \to X$ son continuos y calcúlese su norma:

    (a) $T(f)(x) = 3x^2 f(0)$.

    (b) $T(f)(x) = f(x^m)$, donde $m \in \mathbf{N}$ es dado.

11. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}, \; t \in [0,1]$$

en cada uno de los espacios siguientes:

    (a) $X = C[0,1]$ con la norma uniforme.

    (b) $X = C^1[0,1]$ con la norma definida por la suma de la norma uniforme de la función y la norma uniforme de la derivada.

    (c) $X = C[0,1]$ con la norma de $L^1(0,1)$.