ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
CURSO 2016/17

1. Sea A un subconjunto de un espacio prehilbertiano. Pruébese que si A es ortogonal y no contiene al vector cero, entonces A es linealmente independiente.

2. Sean $x, y \in H$, siendo H un espacio prehilbertiano , $y \neq 0$. Entonces

$$\|x\| + \|y\| = \|x + y\|$$

   si y solamente si $x = \alpha y$ para algún número real $\alpha \geq 0$.

3. Sea H un espacio prehilbertiano y $x, y \in H$. Pruébese que x e y son ortogonales si y solamente si $\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$ (Teorema de Pitágoras).

4. Decídase razonadamente cuáles de los espacios normados que se indican a continuación son espacios prehilbertianos:

   (a) $X = \mathbf{R}^3$ con la norma $\|x\| = \max\{|x_1|, |x_2|, |x_3|\}$, $\forall\ x = (x_1, x_2, x_3) \in X$.

   (b) $X = C([a, b], \mathbf{R})$ con la norma $\|f\|_0 = \max\limits_{t \in [a,b]} |f(t)|, \forall\ f \in X$.

   (c) $X = C([a, b], \mathbf{R})$ con la norma $\|f\|_{L^1(a,b)} = \int_a^b |f(t)|\ dt,\ \forall\ f \in X$.

   (d) $X = \{f \in C^1([a, b], \mathbf{R}) : f(a) = 0\}$, con la norma $\|f\| = \int_a^b |f'(t)|^2\ dt$, $\forall\ f \in X$.

5. Sea el espacio normado $(l_p, \|\cdot\|_p),\ 1 \leq p \leq \infty$. Demuéstrese que $(l_p, \|\cdot\|_p)$ es un espacio prehilbertiano si y solamente si $p = 2$.

6. Sea c_{00} el espacio vectorial de sucesiones casi-nulas, con el producto escalar

$$\langle \{x_n\}, \{y_n\} \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$$

   Probar que con este producto escalar, c_{00} es un espacio prehilbertiano, pero no un espacio de Hilbert.

7. Demuéstrese que la elipse $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\}$ de semiejes $a, b \in \mathbf{R}^+$, es la esfera unidad para una norma de espacio de Hilbert en $\mathbf{R}^2$.

8. Sean $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones de Cauchy en un espacio prehilbertiano H. Pruébese que que la sucesión de números reales $\{< x_n, y_n >\}$ es convergente.

9. Sea H un espacio prehilbertiano y $\{e_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión ortonormal. Pruébese que si $f \in H$ y $\alpha_n =< e_n, f >,\ \forall\ n \in \mathbf{N}$, entonces para cualesquiera números reales $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, se tiene

$$\|f - \sum_{j=1}^{k} \lambda_j e_j\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 + \sum_{j=1}^{k} |\lambda_j - \alpha_j|^2$$

Interprétese la relación anterior en términos de "teoría de aproximación".

10. Si $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, se define como

$$f(a,b,c) = \int_{-1}^{1} |x^3 - a - bx - cx^2|\ dx,\ \forall\ (a,b,c) \in \mathbf{R}^3,$$

demuéstrese que f tiene mínimo global y calcúlese su valor.

11. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana). Si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

12. Usando el teorema de caracterización de bases hilbertianas, pruébese razonadamente que un subconjunto de H ortonormal $B = \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$, es base hilbertiana de H si y solamente si se cumple la condición siguiente:

$$\forall\ f, g \in H,\ < f, g >= \sum_{n=1}^{\infty}\ < f, f_n >< g, f_n >$$

13. Sea $\{\lambda_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión de números reales tal que $\lambda_n \in (0,1]$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$. Trivialmente,

$$< x, y >:= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n,\ \forall\ x = \{x_n\} \in l_2, \forall\ y = \{y_n\} \in l_2 \qquad (1)$$

define un producto escalar en l_2. Demuéstrese que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ es convergente, entonces l_2, con la norma derivada del producto escalar (1), no es completo.

14. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <, >)$, donde

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ \forall\ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ es continuo y que no existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) =< z, \{x_n\} >,\ \forall\ \{x_n\} \in H.$$

En relación con el Teorema de Riesz-Frèchet, ¿qué conclusión se obtiene?

15. Considérese el espacio l_2 con la norma usual y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión de números reales dada.

    (a) Demuéstrese que $\{\lambda_n x_n\} \in l_2$, $\forall\ \{x_n\} \in l_2$ si y solamente si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada.

    (b) Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada, demuéstrese que el operador lineal $L : l_2 \to l_2$, definido como $Lx = L\{x_n\} = \{\lambda_n x_n\}$ es continuo.

    (c) Si la sucesión $\{\lambda_n\}$ es acotada, calcúlese la norma de L.

16. Sea P_n el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que n, con el producto escalar

$$< p, q >= \int_0^1 p(t)q(t)\ dt,\ \forall\ p, q \in P_n$$

Pruébese que existe un único $p \in P_n$ tal que

$$\int_{-1}^{0} q(t)\ dt = \int_0^1 p(t)q(t)\ dt,\ \forall\ q \in P_n$$

Calcúlese p para $n = 2$.

17. Sea H un espacio de Hilbert de dimensión infinita. Demuéstrese que no existe ningún subconjunto $\mathcal{A} \subset H$ ortogonal que cumpla la propiedad siguiente:

    "Cualquier elemento de H es combinación lineal finita de elementos de $\mathcal{A}$"

    Interprétese el resultado en términos de bases de Hamel.

18. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita. Pruébese que H es isomorfo a l_2.

19. Sea $X = (C[0,1], \|\cdot\|_0)$ y $a(\cdot) \in C[0,1]$ una función dada. El operador

    $$T : X \to X,\ (Tf)(t) = a(t)f(t),\ \forall\ f \in X,\ \forall\ t \in [0,1]$$

    es trivialmente lineal y continuo. Demuéstrese que T es compacto si y solamente si la función $a(\cdot)$ es idénticamente cero.

20. Considérese el espacio prehilbertiano $X = C([-\pi,\pi], \mathbf{R})$ con el producto escalar $< f, g >= \int_{-\pi}^{\pi} fg$. Si $L : X \to X$ se define como

    $$(Lf)(s) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(s-t)f(t)\ dt,$$

    pruébese que L es simétrico y compacto. Determínense los valores propios de L.