# ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS
# CURSO 2016/17

1. (a) Sea $V$ un espacio vectorial real de dimensión $n$ y $L : V \to V$ lineal. Pruébese que son equivalentes las tres afirmaciones siguientes: a) $L$ es inyectiva, b) $L$ es sobreyectiva, c)$L$ es biyectiva.

   (b) Si $W$ es el espacio vectorial real $C([0,1], \mathbf{R})$ con las operaciones habituales y $L : W \to W$ se define como $L(f)(t) = \int_0^t f(s)\, ds$, $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall\, f \in W$, pruébese que $L$ es lineal, inyectiva y no sobreyectiva.

   (c) ¿Qué conclusión obtienes de los dos apartados anteriores?

2. Sea $X$ un espacio vectorial real. Demuéstrese que se puede definir una norma, al menos, en $X$.

3. Sea $X$ un espacio normado. Para $x \in X$ y $r > 0$, pruébese

   (a) $\overline{B}(x; r) = \overline{B(x; r)}$

   (b) $B(x; r) = int(\overline{B}(x; r))$

4. Demuéstrese que el conjunto de los polinomios reales, con las operaciones habituales, es un espacio vectorial real de dimensión infinita. Escríbase alguna base.

5. Demuéstrese que $l_1$ es un espacio vectorial real, con las operaciones habituales. Si $H$ es el subconjunto de $l_1$ formado por los elementos canónicos, pruébese que $H$ es linealmente independiente, pero no base de $l_1$. ¿Tiene $l_1$ dimensión infinita?

6. Para $1 \le p, q \le \infty$, $p \ne q$, encuéntrese la relación entre $l_p$ y $l_q$.

7. Probar que el conjunto $\{\{x_n\} \in l_2 : |x_n| < 1,\ \forall\, n \in \mathbf{N}\}$ es un conjunto abierto en $l_2$.

8. Considérese el espacio $X = C[-1, 1]$, con la norma uniforme. ¿Es el subconjunto formado por los polinomios abierto en $X$?

9. Sea $X = L^1[0,1]$ con la norma usual. ¿Es el conjunto $\{f \in X : \int_0^1 f(t)\ dt = 0\}$ cerrado en $X$?

10. Sea $X$ un espacio normado.

    (a) Encontrar todos los subespacios vectoriales de $X$ que estén contenidos en una bola.

    (b) Encontrar todos los subespacios vectoriales que contengan una bola de $X$.

11. Encuéntrese la clausura de $l_p$ y $c_0$ en $l_\infty$, donde $1 \leq p < \infty$.

12. Sea $X = C[0,1]$ y $f : X \to \mathbf{R}$, $f(x) = x(1), \forall\ x \in X$.

    (a) Probar que $f$ es continua si en $X$ consideramos la norma uniforme.

    (b) Probar que $f$ no es continua si en $X$ se considera la norma usual de $L^p(0,1),\ 1 \leq p < \infty$.

13. Sea $X = C[0,1]$ y $M : X \to X$, definido como $M(f) = f^2,\ \forall\ f \in X$. Demuéstrese que $M$ es continua pero no uniformemente continua si en $X$ se considera la norma uniforme.

14. Sea $X = C[0,1]$ con la norma usual y $L : X \to X$ definido como $L(f)(x) = \int_0^x e^t f(t)\ dt$. Si, para cada $n \in \mathbf{N}$ definimos $L_n : X \to, X$ como $L_n(f)(x) = \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}\right) f(t)\ dt$, pruébese que $\|L - L_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

15. Considérense, para cada $n \in \mathbf{N}$, los operadores $A_n, B_n : l_2 \to l_2$ definidos como
$$A_n(x) = (x(1)/n, x(2)/(2n), x(3)/(3n), \ldots),$$
$$B_n(x) = (0, \ldots, 0, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots)$$
para cada $x = (x(1), x(2), x(3), \ldots) \in X$. Pruébese que $\|A_n\| \to 0$, $B_n(x) \to 0, \forall\ x \in l_2$, pero que $\|B_n\|$ no converge a cero.

16. Sea $X = (C[0,1], \mathbf{R})$. Demuéstrese que la norma uniforme $\|\cdot\|_0$ y la norma definida como $\|u\|_{L^1(0,1)} = \int_0^1 |u(t)|\ dt,\ \forall\ u \in X$, no son equivalentes. ¿Qué conclusión se obtiene sobre la dimensión de $X$?

17. Sea $X = \mathrm{l}_2$ con la norma usual y $\{e^n\}$ la sucesión de elementos canónicos. Sea $E$ el subespacio vectorial de $X$ generado por la sucesión$\{e^n\}$. Demuéstrese que $E$ no es cerrado.

18. (a) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en $\mathrm{l}_\infty$ pero no en $\mathrm{l}_1$ ni en $\mathrm{l}_2$.

    (b) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en $\mathrm{l}_2$ pero no en $\mathrm{l}_1$.

    (c) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en $c_0$ pero no en $\mathrm{l}_2$

19. Sea $X = \{u : [0,1] \to \mathbf{R} : u \text{ es continua}, u(0) = 0\}$ con la norma uniforme $\|\cdot\|_0$ y el funcional $L : X \to \mathbf{R}$ definido como $L(u) = \int_0^1 u(t)\, dt,\ \forall\, u \in X$. Demuéstrese que $L$ es lineal y continuo. Calcúlese la norma de $L$ en $X^*$ ¿Se alcanza dicha norma?

20. Considérese el espacio normado $\mathrm{l}_2$ con la norma usual y sea $\{\lambda_n\}$ una sucesión dada de números reales.

    (a) Encuéntrese una condición necesaria y suficiente sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$ para que el operador (lineal) $A(\{x_n\}) = \{\lambda_n x_n\}$ esté bien definido de $\mathrm{l}_2$ en $\mathrm{l}_2$.

    (b) Encuéntrese una condición necesaria y suficiente sobre la sucesión $\{\lambda_n\}$ para que el operador (lineal) $A(\{x_n\}) = \{\lambda_n x_n\}$ esté bien definido de $\mathrm{l}_2$ en $\mathrm{l}_2$ y sea continuo. En este caso, ¿se alcanza siempre la norma de dicho operador?

21. Sea $X$ un espacio normado, $X^\sharp$ el dual algebraico y $L \in X^\sharp$. Demuéstrese que $L \in X^*$ (dual topológico) si y solamente si el núcleo de $L$ es cerrado.

22. Si $X$ es un espacio normado, $L \in X^\sharp$ ($L$ no idénticamente cero) y $\alpha \in \mathbf{R}$ se define el hiperplano $H(L, \alpha)$ como

$$H(L, \alpha) = \{x \in X : L(x) = \alpha\}$$

    Demuéstrese que cualquier hiperplano en $X$ es o cerrado o denso. ¿Qué particularidades tiene este resultado si la dimensión de $X$ es finita?

23. Considérense los espacios $l_1$ y $l_\infty$ con las normas usuales. Demostrar que la aplicación $l_\infty \to l_1^*$, $y = \{y_k\} \to y^*$, definida como $y^*(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$, $\forall x = \{x_k\} \in l_1$ define una isometría lineal de $l_\infty$ sobre $l_1^*$.

24. Sea $X = C[0,1]$ con la norma uniforme. Pruébese que los operadores lineales siguientes $T : X \to X$ son continuos y calcúlese su norma:

    (a) $T(f)(x) = 3x^2 f(0)$.

    (b) $T(f)(x) = f(x^m)$, donde $m \in \mathbf{N}$ es dado.

25. Estudiar la convergencia de la sucesión

$$f_n(t) = \frac{t^{n+1}}{n+1} - \frac{t^{n+2}}{n+2}, \ t \in [0,1]$$

en cada uno de los espacios siguientes:

    (a) $X = C[0,1]$ con la norma uniforme.

    (b) $X = C^1[0,1]$ con la norma definida por la suma de la norma uniforme de la función y la norma uniforme de la derivada.

    (c) $X = C[0,1]$ con la norma de $L^1(0,1)$.