A. Cañada, Análisis Funcional, 2014/15

TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA.

Libro de S. Banach, 1.932, aunque Banach reconoce la prioridad de Schauder en la obtención del Teorema para espacios de Banach.

MOTIVACIÓN

1) $\overline{X}$, $\overline{Y}$ e.v.n. $L: \overline{X} \to \overline{Y}$ lineal y continua $\not\Rightarrow$ L abierta (aplica abiertos de $\overline{X}$ en abiertos de $\overline{Y}$)

Ej. $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ lineal / $\dim L(\mathbb{R}^n) < n$.

2) $L: \overline{X} \to \overline{Y}$ lineal, (continua), abierta $\Rightarrow$ L es sobreyectiva.

$L(B_{\overline{X}}(0;1)) \supset \overline{B}_{\overline{Y}}(0;c)$

En efecto $\forall y \in \overline{Y}$, $y \neq 0$, $\left\| \frac{y\,c}{\|y\|} \right\| = c \Rightarrow \exists u \in B_{\overline{X}}(0;1)$ t.q.

$L(u) = \frac{y\,c}{\|y\|} \Rightarrow L\left(\frac{\|y\|\,u}{c}\right) = y \Rightarrow L$ es sobreyectiva.

3) ¿Será cierto el recíproco? Es decir

$L: \overline{X} \to \overline{Y}$ lineal, continua, sobreyectiva $\overset{¿?}{\Rightarrow}$ L abierta.

Vamos a ver que sí cuando $\overline{X}$, $\overline{Y}$ son Banach.

TEOREMA DE LA APLICACIÓN ABIERTA (Banach-Schauder, 1.932)

Sean E, F e.v.n. de Banach (reales siempre)

$T: E \to F$ lineal, continua, sobreyectiva.

Entonces T es abierta. (ver nota 1)

DEMOSTRACIÓN

A) $\exists\, c>0 : B_F(0;2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

Definimos $Z_n \equiv \overline{nT(B_E(0;1))}$

T sobreyectiva $\Rightarrow F = \bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n$. ($F$ Banach)

T. C. Baire $\Rightarrow \exists\, n_0 \in \mathbb{N} / \operatorname{int}(Z_{n_0}) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, z_0 \in F,\ r>0 /\ B_F(z_0;r) \subset \overline{n_0 T(B(0;1))} = n_0 \overline{T(B(0;1))}$

$\Rightarrow \frac{1}{n_0} B_F(z_0;r) \subset \overline{T(B(0;1))}$

$\| \quad B_F\left(\frac{z_0}{n_0}; \frac{r}{n_0}\right) \Rightarrow \operatorname{int}\left(\overline{T(B_E(0;1))}\right) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists\, c>0 \quad \exists\, y_0 \in F /\ B(y_0;4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

Ahora $\begin{cases} y_0 \in B(y_0;4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} \\ -y_0 \in \overline{T(B_E(0;1))} \end{cases}$ (por simetría de $B_E(0;1)$ y T lineal)

Así $\left.\begin{array}{l} B(y_0;4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} \\ -y_0 \in \overline{T(B_E(0;1))} \end{array}\right\} \Rightarrow B(0;4c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} + \overline{T(B_E(0;1))} = 2\overline{T(B_E(0;1))}$

$\Rightarrow B(0;2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))}$

B) A) + T cerrada $\Rightarrow B_F(0;c) \subset T(B_E(0;1))$

Veamos

(*) $\forall y \in B_F(0;c)$, $\exists x \in B_E(0;1) /\ y = Tx$.

Lema

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \exists z_n \in E, \ \|z_n\| < \frac{1}{2^n}$ t.q.

$$\|y - T(z_1 + \cdots + z_n)\| < \frac{c}{2^n} \qquad (*)$$

Demostración

$n=1$ $y \in B_F(0;c) \Rightarrow 2y \in B_F(0;2c) \subset \overline{T(B_E(0;1))} \Rightarrow$

$B_F(2y;c) \cap T(B_E(0;1)) \neq \emptyset \Rightarrow \exists z \in B_E(0;1)$ t.q.

$T(z) \in B_F(2y;c) \Rightarrow \|T(z) - 2y\| < c \Rightarrow$

$\|y - T(\frac{z}{2})\| < \frac{c}{2}$. Tomamos $z_1 = \frac{z}{2}$.

$n=2$ Sabemos que $\exists z_1 \in E, \ \|z_1\| < \frac{1}{2} \ / \ \|y - T(z_1)\| < \frac{c}{2}$

Como $y - T(z_1) \in B_F(0; \frac{c}{2}) \Rightarrow 4(y - T(z_1)) \in B_F(0;2c)$

$\subset \overline{T(B_E(0;1))}$

$\Rightarrow B(4(y - T(z_1)); c) \cap T(B_E(0;1)) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists w \in B_E(0;1) \ / \ T(w) \in B(4(y - T(z_1)); c)$

$\Rightarrow \|T(w) - 4(y - T(z_1))\| < c \Rightarrow \|T(\frac{w}{4}) - y + T(z_1)\| < \frac{c}{4}$

$\Rightarrow \|y - T(z_1) - T(z_2)\| < \frac{c}{2^2}, \quad z_2 = \frac{w}{4}, \ \|z_2\| < \frac{1}{2^2}$

TERMINA LA DEMOSTRACIÓN DEL LEMA

Así pues, damos (*) por probado.

Ahora (E Banach)

$x_n = z_1 + \cdots + z_n$ es de Cauchy en $E \Rightarrow x_n \to x$

$\|x\| = \lim \|x_n\| < \lim_{n\to\infty} (\|z_1\| + \cdots + \|z_n\|) < \|z_1\| + \lim_{n\to\infty} (\|z_2\| + \cdots + \|z_n\|)$

$\leq \|z_1\| + \frac{1}{2} < 1$

y $T(x) = y$ c.q.d.