Análisis Funcional (Antonio Cañada, 2014/15)

EXISTENCIA DE BASES HILBERTIANAS EN UN ESPACIO DE HILBERT H, SEPARABLE DE DIMENSIÓN ∞.

Sea $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$ el subconjunto denso y numerable en H.

Sea g_1 el primer elemento no nulo de C, $f_1 = \dfrac{g_1}{\|g_1\|}$

Supongamos que hemos elegido $\{f_1, \ldots, f_p\}$ ortonormal.

Vamos a elegir f_{p+1}:

Tiene que haber algún elemento $c_{n(p)}$ en C t.q. $c_{n(p)}$ es linealmente independiente con $\{f_1, \ldots, f_p\}$

Tomemos

Proyección ortogonal de $c_{n(p)}$ sobre el espacio engendrado por $\langle f_1, \ldots, f_p \rangle$

$$g_{p+1} = c_{n(p)} - P_{\langle f_1, \ldots, f_p \rangle} c_{n(p)}$$

Entonces $f_{p+1} = \dfrac{g_{p+1}}{\|g_{p+1}\|}$

Así tenemos $B = \{f_1, f_2, \ldots\}$ ortonormal t.q. cada $c_j \in C$ es comb. lineal finita de elementos de B.

B es ortonormal. Ahora, si $f \in H$ verifica $f \in B^\perp$, entonces $f \in C^\perp$, pues cada elemento de C es comb. lineal finita de elementos de B. Finalmente, si $f = \lim_{n\to\infty} c_{j(n)}$, $\langle f, f \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle f, c_{j(n)} \rangle = 0 \Rightarrow f = 0$.

Hechos que hemos usado:

1) C verifica $\overline{C} = H$, portanto C tiene algún elemento no nulo.

2) Una vez elegido $\{f_1, \dots, f_p\}$, si no existe ningún elemento no nulo de C, $c_{n(p)}$, t.q. $c_{n(p)}$ es lineal. indep. con $\{f_1, \dots, f_p\}$, entonces el espacio engendrado por C, $M(C)$, es de dim finita y por tanto cerrado $\Rightarrow \overline{C} \subseteq M(C) \neq H$, lo que no es posible.

3) $\forall g \in H$, $g - P_{\langle f_1, \dots, f_p \rangle} g$ es ortogonal a $f_1, \dots, f_p$

pues $g = g - P_{\langle f_1, \dots, f_p \rangle} g + P_{\langle f_1, \dots, f_p \rangle} g \in M^{\perp} \oplus M$

donde $M = \langle f_1, \dots, f_p \rangle$.

4) Un subconjunto ortonormal B de H es base Hilbertiana $\Longleftrightarrow B^{\perp} = \{0\}$.

5) Continuidad del producto escalar.