A. Cañada (Análisis Funcional 2014/2015)

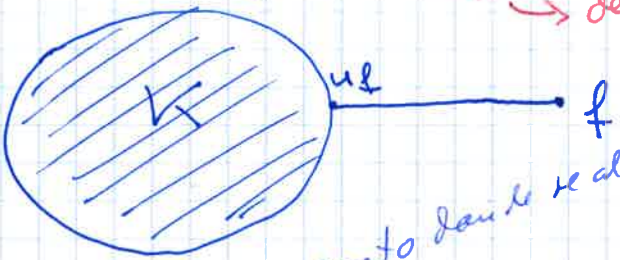
TEOREMA (De la proyección sobre un convexo cerrado)

Sea $H(\mathbb{R})$ esp. de Hilbert (completo, por tanto)

y $K \subset H$ $\quad K \begin{cases} \text{convexo} \\ \text{cerrado} \\ \text{no vacío} \end{cases}$

Entonces $\forall f \in H \quad \exists! \, u_f \in K \, / \, d(f, u_f) = d(f, K)$

→ después de la caracterización



(punto donde se alcanza la $d(f,K)$)

Además u_f se caracteriza por $\begin{cases} u_f \in K \\ \langle f-u_f, v-u_f \rangle \leq 0 \\ \quad \forall v \in K \end{cases}$

Si $u_f \equiv P_K f \qquad P_K : H \longrightarrow H$, entonces

$$\| P_K f_1 - P_K f_2 \| \leq \| f_1 - f_2 \|, \; \forall f_1, f_2 \in H.$$

(P_K es lipschitziana, con constante de Lipschitz 1)

DEMOSTRACIÓN

① Existencia de u_f $(\forall f \in H)$

Sea $\{v_n\} \subset K$ t.q. $d(v_n, f) \longrightarrow d(K, f) \equiv d \geq 0$

Apliquemos la identidad del paralelogramo a los vectores $\begin{cases} u = f - v_n \\ v = f - v_m \end{cases}$

$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) \quad \Rightarrow$

$\|2f - (v_n + v_m)\|^2 + \|v_n - v_m\|^2 = 2(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2)$

$\Rightarrow \|v_n - v_m\|^2 = 2(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2) - 4\left(\|f - \frac{v_n+v_m}{2}\|^2\right)$

Como $\dfrac{v_n+v_m}{2} \in K \Rightarrow \|f - \frac{v_n+v_m}{2}\|^2 \geq d^2 \quad \Rightarrow$

$\|v_n - v_m\|^2 \leq 2(\|f-v_n\|^2 + \|f-v_m\|^2) - 4d^2 \xrightarrow{n,m \to +\infty} 0$

Así, $\{v_n\}$ es de Cauchy en H $\Rightarrow$ $v_n \to v \in K$
Por ser K cerrado $(v = u_f)$. $\Downarrow$ $d(v,f) = d(K,f)$

② Caracterización de u_f.

$$\left.\begin{array}{l} u_f \in K \\ d(f, u_f) = d(f, K) \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \begin{array}{l} u_f \in K \\ \langle f-u_f, w-u_f\rangle \leq 0 \\ \forall w \in K. \end{array}$$

$\Rightarrow$) Sea $w \in K$ y $v = (1-t)u_f + tw \in K$, $t \in (0,1)$

Entonces

$$\|f-u_f\|^2 \leq \|f-(1-t)u_f - tw\|^2 \Rightarrow$$

$$\|f-u_f\|^2 \leq \langle f-u_f - t(w-u_f), f-u_f - t(w-u_f)\rangle$$

$$= \cancel{\|f-u_f\|^2} - 2t\langle f-u_f, w-u_f\rangle + t^2\|w-u_f\|^2$$

$$\Rightarrow 2t\langle f-u_f, w-u_f\rangle \leq t^{\cancel{2}}\|w-u_f\|^2$$

Si $t \to 0^+ \Rightarrow \langle f-u_f, w-u_f\rangle \leq 0$, $\forall w \in K$.

Veamos que

$\Leftarrow$) $\|u_f - f\|^2 - \|w-f\|^2 \leq 0$, $\forall w \in K$ $(\Rightarrow \|u_f - f\| \leq \|w-f\|$ $\forall w \in K)$

$= \langle u_f - f, u_f - f\rangle - \langle w-f, w-f\rangle =$ (¡Cuentas elementales!)*

$= ~~\langle u_f, u_f\rangle - 2\langle u_f, f\rangle + \langle f, f\rangle - \langle w, w\rangle + 2\langle f, w\rangle - \langle f, f\rangle~~$

$= ~~2\langle f, w-u_f\rangle + \langle u_f, u_f\rangle - \langle w, w\rangle =~~$

$$= 2\langle f-u_f, w-u_f\rangle - (\langle u_f - w, u_f - w\rangle) \leq 0, \text{ c.q.d.}$$

③ Unicidad de u_f. Sean $u_1, u_2 \in K$ verificando las propiedades de la caracterización de u_f, dadas en ②. Entonces

A. Cañada (Anál. Funcional 2014/15)

$$\langle f-u_1, v-u_1\rangle \le 0, \ \forall v\in K$$
$$\langle f-u_2, w-u_2\rangle \le 0 \ \forall w\in K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle f-u_1, u_2-u_1\rangle \le 0 \\ \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle f-u_1, u_2-u_1\rangle + \langle f-u_2, u_1-u_2\rangle \le 0 \Rightarrow$$

$$\cancel{\langle f, u_2-u_1\rangle} - \langle u_1, u_2-u_1\rangle + \cancel{\langle f, u_1-u_2\rangle} - \langle u_2, u_1-u_2\rangle \le 0$$

$$\Rightarrow \langle u_1, u_1-u_2\rangle - \langle u_2, u_1-u_2\rangle \le 0 \Rightarrow$$

$$\langle u_1-u_2, u_1-u_2\rangle \le 0 \Rightarrow u_1=u_2.$$

④ Carácter lipschitziano de la proyección.

Sean $f_1, f_2 \in H \Rightarrow$

$$\langle f_1-u_{f_1}, v-u_{f_1}\rangle \le 0 \quad \forall v\in K$$
$$\langle f_2-u_{f_2}, w-u_{f_2}\rangle \le 0 \quad \forall w\in K$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle f_1-u_{f_1}, u_{f_2}-u_{f_1}\rangle \le 0 \\ \langle f_2-u_{f_2}, u_{f_1}-u_{f_2}\rangle \le 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \langle f_1-u_{f_1}, u_{f_2}-u_{f_1}\rangle + \langle f_2-u_{f_2}, u_{f_1}-u_{f_2}\rangle \le 0$$

$$\Rightarrow \langle f_1, u_{f_2}-u_{f_1}\rangle + \langle u_{f_1}, u_{f_1}-u_{f_2}\rangle - \langle f_2, u_{f_2}-u_{f_1}\rangle$$
$$- \langle u_{f_2}, u_{f_1}-u_{f_2}\rangle \le 0$$

$$\Rightarrow \langle u_{f_1}-u_{f_2}, u_{f_1}-u_{f_2}\rangle \le \langle f_2-f_1, u_{f_2}-u_{f_1}\rangle \Rightarrow$$

$$\|u_{f_1}-u_{f_2}\|^2 \overset{C-S.}{\le} \|f_2-f_1\|\,\|u_{f_1}-u_{f_2}\| \Rightarrow$$

$$\|u_{f_1}-u_{f_2}\| \le \|f_1-f_2\|, \text{ c.q.d.}$$

TEOREMA DE LA PROYECCIÓN ORTOGONAL

EJERCICIO (K un sub. vectorial cerrado)

Si en el Teorema anterior, K es un sub. vectorial cerrado, entonces

$P_K : H \longrightarrow \cancel{H}$ verifica

ii) P_K es lineal, (combina ya lo sabemos)

i) $P_K f$ se caracteriza por ($f - P_K f \in K^\perp$)

$$\langle f - P_K f, v \rangle = 0, \ \forall v \in K.$$

iii) $H = \overbrace{P_K(H)}^{K} \oplus \overbrace{P_K(H)}^{K^\perp}{}^{\perp}$ de manera topológica (las proyecciones son continuas).

Solución

i) Sabemos que

$$\langle f - P_K f, v - P_K f \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K$$

$$\Rightarrow \langle f - P_K f, tv - P_K f \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow t \langle f - P_K f, v \rangle - \langle f - P_K f, P_K f \rangle \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \langle f - P_K f, v \rangle = 0, \ \forall v \in K$$

Recíprocamente, si se cumple lo anterior

$$\left.\begin{array}{l} \langle f - P_K f, v \rangle = 0 \quad \forall v \in K. \text{ Como } P_K f \in K \\ \langle f - P_K f, P_K f \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle f - P_K f, v - P_K f \rangle = 0 \leq 0.$$

ii) P_K es lineal.

$$\left.\begin{array}{l} \langle f_1 - P_K f_1, v \rangle = 0, \ \forall v \in K \\ \langle f_2 - P_K f_2, v \rangle = 0, \ \forall v \in K \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\langle f_1 + f_2 - (P_K f_1 + P_K f_2), v \rangle = 0 \quad \forall v \in K. \text{ Usando i)},$$

A. Cañada (Anál. Funcional, 2014/2015)

$$P_K(f_1+f_2) = P_K(f_1)+P_K(f_2), \ \forall f_1, f_2 \in K$$

ya que $\langle f_1+f_2, P_K(f_1+f_2), v\rangle = 0 \ \forall v \in K$ es una caracterización

También

$$\langle f - P_K f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K \quad \Rightarrow$$

$$\langle \lambda f - \lambda P_K f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K \quad \Rightarrow$$

$$P_K(\lambda f) = \lambda P_K(f).$$

Ahora $\forall f \in H$ $\quad f = \underbrace{P_K(f)}_{\in K} + \underbrace{(f - P_K(f))}_{\in K^\perp}$

Si $f = u+v$, $u \in K$, $v \in K^\perp$, entonces

$\|f\|^2 = \langle f, f\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 \Rightarrow$ $\|u\| \le \|f\|$, $\|v\| \le \|f\|$ $\Rightarrow$ las proyecciones son continuas.

NOTA IMPORTANTE (Relación con la derivada de Fréchet) Dado $f \in H$

$\Phi : K \to \mathbb{R}$ (K convexo, cerrado, no vacío)

$\quad v \to \|v - f\|^2 = \langle v - f, v - f\rangle$

Entonces $\exists \min \Phi = \|P_K(f) - f\|^2$ y

(si K es sub. vect. cerrado)

$\Phi'(P_K(f)) = 0 \iff 2\langle f - P_K f, v\rangle = 0 \quad \forall v \in K$