A. Cañada

TEOREMA DE LA GRÁFICA CERRADA.

Motivación

$$\left.\begin{array}{l} E, F \text{ esp. normados} \\ L : E \to F \text{ lineal y continua} \end{array}\right\} \Rightarrow G(L) = \{(x, Lx) : x \in E\}$$
es cerrado en $E \times F$

Si $(x_n, Lx_n) \to (x, y) \Rightarrow Lx_n \to Lx \Rightarrow Lx = y$
$\Rightarrow (x, y) \in G(L)$.

El recíproco es cierto si E y F son Banach.

TEOREMA (De la gráfica cerrada)

Sean E, F espacios de Banach
$T : E \to F$ lineal con $G(T)$ cerrado en $E \times F$

Entonces T es continuo.

Demostración

$(E, \|\cdot\|_1)$, $(E, \|\cdot\|_2)$

$\|x\|_1 = \|x\|_E + \|Tx\|_F$ (norma de la gráfica)

$\|x\|_2 = \|x\|_E$

$(E, \|\cdot\|_2)$ es Banach

$(E, \|\cdot\|_1)$ es Banach si (x_n) es de Cauchy en

$(E, \|\cdot\|_1) \Rightarrow \|x_n - x_m\|_1 = \underbrace{\|x_n - x_m\|_E}_{\Downarrow} + \|Tx_n - Tx_m\|_F$

x_n Cauchy en $(E, \|\cdot\|_2)$
Tx_n Cauchy en $(F, \|\cdot\|_F)$

$\Rightarrow \begin{array}{l} x_n \to x \\ Tx_n \to y \end{array}$ por ser $G(T)$ cerrado $y = Tx$

Así $x_n \to x$ con $\|\cdot\|_1$

Claramente $\|\cdot\|_2 \le \|\cdot\|_1$. Por el T.A. Abierta, $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes

$\Rightarrow \exists\, C \geq 0$ t.q.

$$\|x\|_E + \|Tx\|_F \le \underbrace{C\|x\|_E}_{\le (C+1)\|x\|_E} \Rightarrow \|Tx\|_F \le C\|x\|_E$$

$\Downarrow$

T continuo.

EJERCICIO

$E = \{u \in C^2[0,1] : u(0) = u'(0) = 0\}$, $\|\cdot\|_0$

$F = (C[0,1], \|\cdot\|_0)$

$T: E \to F$, $Tu = u + u''$

Demostrar que T es
- cerrado
- no continuo.

a) T es cerrado

$(u_n, T(u_n)) \to (u, v) \in E \times F$

$u_n \to u$ unif.

$u_n + u_n'' \to z$ unif. $\Rightarrow u_n'' \to z - u$ unif.

$u_n'' \xrightarrow{c.u.} z - u$
$u_n'(0) = 0$
$\Rightarrow u_n'(x) = u_n'(0) + \int_0^x u_n''(s)\,ds \to \int_0^x (z-u)$

$\Rightarrow u_n' \to$ c. unif. en $[0,1]$. Análogamente

$u_n(0) = 0 \Rightarrow u_n$ c. unif. en $[0,1]$.

Resumen $\begin{cases} u_n \xrightarrow{u} \text{c.u. en } [0,1] \\ u_n' \to v \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \\ u_n'' \to \cancel{w} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} u \in C^2[0,1] \\ u(0) = u'(0) = 0 \\ u'' = \cancel{w} \Rightarrow z = u + u'' \end{array}$

$\Rightarrow (u, z) \in G(T)$

No es continua, pues $u_n(x) = x \operatorname{sen}(nx)$

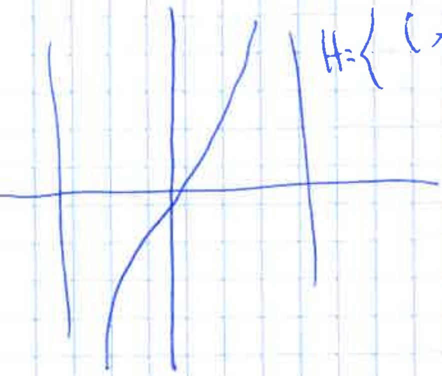
$$u_n''(x) = -x n^2 \operatorname{sen}(nx)$$

EJERCICIO

$A : X \to X$, X e.v. normado, A lineal y cerrado (con gráfica cerrada)

$\not\Rightarrow$ A aplique cerrados en cerrados.

Ejemplo $\quad p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \to x$ lineal y continua.



$H = \{(x, \operatorname{tg} x) : x \in (-\pi/2, \pi/2)\}$ es cerrado

$p(H) = (\cancel{-\infty, +\infty})\ (-\pi/2, \pi/2)$ que es abierto y no cerrado

(*) Ahora $x_n(t) \not\to x(t)$ en $L^2(0,1)$ $\forall x \in C[0,1]$, pues

$$\|x-x_n\|^2_{L^2(0,1)} \geq \int_{1/n^3}^{1} (x(t)-x_n(t))^2\,dt = \int_{1/n^3}^{1} (x(t)-t^{-1/3})^2\,dt$$

$$\Rightarrow \liminf_{n\to\infty} \|x-x_n\|^2 \geq \int_0^1 (x(t)-t^{-1/3})^2\,dt$$

Como $t^{-1/3}$ no es acotada en $(0,1]$, existe algún intervalo I compacto / $(x(t)-t^{-1/3})^2 > 0$ $\Rightarrow$ la última integral es positiva.

<u>NOTA</u> $x_n(t) \to y(t)$ en $L^2(0,1)$ $y(t) = t^{-1/3}$ que no es continua en $[0,1]$

$$y(t) \in L^2(0,1) \Leftrightarrow \int_0^1 y^2(t)\,dt = \int_0^1 t^{-2/3}\,dt < +\infty$$

$$\left.\frac{t^{1/3}}{1/3}\right]_0^1 < +\infty.$$