# TEOREMA DE HAHN-BANACH

H. Hahn, 1.927

S. Banach, 1.929

A. Cañada (2016)

## TEOREMA 1

$E(\mathbb{R})$ e. vectorial

$$p: E \to \mathbb{R} \begin{cases} p(\lambda x) = \lambda p(x), & \forall \lambda > 0, \ \forall x \in E \\ p(x+y) \leq p(x) + p(y), & \forall x, y \in E \end{cases}$$

$G$ sub. vectorial de $E$ y $g: G \to \mathbb{R}$ lineal

t.q. $g(x) \leq p(x), \ \forall x \in G$

**ENTONCES**

$$\exists \ f: E \to \mathbb{R} \text{ lineal} \begin{cases} f|_G = g \\ f(x) \leq p(x), \ \forall x \in E \\ \text{(¡Esta es la gracia!)} \end{cases}$$

**DEMOSTRACIÓN**

$$P = \left\{ h: D(h) \to \mathbb{R} \begin{cases} D(h) \text{ sub. vect. de } E \quad D(h) \supset G \\ h \text{ lineal} \\ h|_G = g \\ h(x) \leq p(x), \ \forall x \in D(h). \end{cases} \right.$$

$P \neq \emptyset \ (g \in P)$

$P$ se puede ordenar (rel. de orden)

$$h_1 \leq h_2 \Leftrightarrow \begin{cases} D(h_1) \subset D(h_2) \\ h_2|_{D(h_1)} = h_1 \end{cases}$$

Reflexiva
Antisimétrica
Transitiva

$P$ es inductivo (si $Q \subset P$ es tot. ordenado, $Q$ tiene cota superior)
(cota superior $r \geq q, \ \forall q \in Q$)

Ahora si $Q = \{h_i, \ i \in I\}$ es totalmente ordenado,
(totalmente ordenado $\forall x, y \in Q \quad x \leq y$ ó $y \leq x$)
tomando

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \qquad \forall x \in D(h) \ \exists \ i \,/\, x \in D(h_i) \quad h(x) = h_i(x)$$

$h$ es cota superior para $Q$.

Por el lema de Zorn, existe algún elemento $f$, maximal en $P$ ($f \in P$, $\nexists \ h \in P \,/\, f < h$).

Si $D(f) = E$ el teorema está demostrado.

Ahora bien, no es posible que $D(f) \subsetneq E$:

Supongamos que $\exists x_0 \in E \setminus D(f)$. Entonces vamos a construir $h \in \mathcal{P} \,/\, f < h$:

$$D(h) = \mathcal{D}(f) + \langle x_0 \rangle = \mathcal{D}(f) + \mathbb{R} x_0$$

$$h: D(h) \to \mathbb{R} \begin{cases} h(x) = f(x), & x \in \mathcal{D}(f) \\ h(x) = f(x) + t\alpha, & \text{si } x \in \mathcal{D}(f) + \mathbb{R} x_0 \end{cases}$$

donde $\alpha$ hay que elegirlo adecuadamente para que $h(y) \leq p(y) \quad \forall y \in \mathcal{D}(f) + \langle x_0 \rangle$.

¿Cómo elegir $\alpha$?

$\cancel{h(x) = f(x) + t\alpha}$ ¿?

$\Updownarrow$

$\forall x \in \mathcal{D}(f), \ \forall t \in \mathbb{R}$

$y = x + t x_0, \quad x \in D(f), \quad t \in \mathbb{R}$

$h(y) \leq p(y) \Leftrightarrow h(x + t x_0) \leq p(x + t x_0) \Leftrightarrow f(x) + t\alpha \leq p(x + t x_0)$

Así

$h(y) \leq p(y) \Leftrightarrow f(x) + t\alpha \leq p(x + t x_0), \ (2) \quad \forall x \in \mathcal{D}(f), \ \forall t \in \mathbb{R}$

$t = 0$ trivial

$t > 0 \ (2) \Leftrightarrow \alpha \leq \dfrac{p(x + t x_0) - f(x)}{t} \quad \forall x \in \mathcal{D}(f), \ \forall t > 0$

$t < 0 \ (2) \Leftrightarrow \alpha \geq \dfrac{p(x + t x_0) - f(x)}{t} \quad \forall x \in \mathcal{D}(f), \ \forall t < 0$

ó $A = B = \alpha$

Es posible elegir $\alpha \Leftrightarrow$

$$A = \sup_{t<0} \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t} \leq \inf_{t>0} \frac{p(x + t x_0) - f(x)}{t} = B$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{p(x+tx_0)-f(x)}{t} \leq \frac{p(y+t'x_0)-f(y)}{t'} \quad (1)$$

$\forall x, y \in \mathcal{D}(f)$
$\forall t \not< 0$
$\forall t' > 0$

$$\Updownarrow$$

$$f\left(\frac{y}{t'}-\frac{x}{t}\right) \leq p\left(\frac{y}{t'}+x_0\right) - \frac{p(x+tx_0)}{t} =$$

$$= p\left(\frac{y}{t'}+x_0\right) + \frac{p(x+tx_0)}{-t} =$$

$$= p\left(\frac{y}{t'}+x_0\right) + p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right)$$

Pero $p\left(\frac{y}{t'}+x_0\right)+p\left(-\frac{x}{t}-x_0\right) \geq p\left(\frac{y}{t'}-\frac{x}{t}\right) \geq$

$$\geq f\left(\frac{y}{t'}-\frac{x}{t}\right)$$

que prueba (1).

## Lema de Zorn

A un conjunto ordenado (relación de orden $\leq$ reflex., antisimétrica, transitiva)

A inductivo: $\forall\, Q \subset A$ $Q$ totalmente ordenado, existe alguna cota superior de $Q$: $p \in A$ t.q. $p \geq q$ $\forall q \in Q$.

Entonces ~~A~~ tiene algún elemento maximal: $a \in A$ t.q. $\nexists\, b \in A$ verificando $a < b$ $(a < b \Leftrightarrow a \leq b$ y $a \neq b)$.

## Teorema de Hahn-Banach para $G = \{0\}$