15/11/2016 ℓ_2 (ℓ_p, $1 \le p \le \infty$) es completo. (1)

$\ell_2 = \{ \{x_n\} / \sum_1^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty \}$, $\|\{x_n\}\| = \left(\sum_1^{+\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2}$ es completo.

En efecto, sea $\{X^k, k \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de Cauchy en ℓ_2

$X^k = \{x^k_n, n \in \mathbb{N}\}, \forall k \in \mathbb{N}$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0(\varepsilon)$ t.q. $\begin{matrix} k \ge k_0(\varepsilon) \\ p \in \mathbb{N} \end{matrix} \Rightarrow \|X^{k+p} - X^k\|_{\ell^2} \le \varepsilon$

$$\|X^{k+p} - X^k\|_{\ell^2} = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \right)^{1/2} \quad (*)$$

Fijado $n \in \mathbb{N}$, $|x_n^{k+p} - x_n^k| = \left(|x_n^{k+p} - x_n^k|^2\right)^{1/2} \le \|X^{k+p} - X^k\|_{\ell^2}$

$\Rightarrow$ La sucesión $\{x_n^k, k \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy $\forall k \in \mathbb{N}$

$\downarrow k \to +\infty$

y_n sea $y = \{y_n\}$

1) ¿$y \in \ell_2$? 2) $\{X^k\} \xrightarrow{k \to +\infty} y$ en ℓ_2

$X^1 \quad \{x^1_1, x^1_2, \ldots x^1_n, \ldots \}$

$X^2 \quad \{x^2_1, x^2_2, \ldots x^2_n, \ldots \}$

$\vdots$

$X^k \quad \{x^k_1, x^k_2 \ldots x^k_n, \ldots \}$

$\downarrow$ Por columnas

$y_1 \quad y_2 \quad y_n \ldots$

2

(*) $\forall\ k \geq k_0(\varepsilon),\ \forall p \in \mathbb{N}$

$$\left(|x_1^{k+p} - x_1^k|^2 + |x_2^{k+p} - x_2^k|^2 + \cdots + |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 + \cdots \right) \leq \varepsilon^2$$

¡esto no vale!

VOLVEMOS A (*)

Sea $N \in \mathbb{N}$ fijo. Por (*)

$$\left(\sum_{n=1}^{N} |x_n^{k+p} - x_n^k|^2 \right) \leq \varepsilon^2$$

Cuando $p \to +\infty$ para $k \geq k_0(\varepsilon)$ fijo

$$\sum_{n=1}^{N} |y_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad \forall N \in \mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n^k|^2 \leq \varepsilon^2 \quad (**) \quad \text{Así}$$

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists k_0(\varepsilon) \,/\, \forall k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |y_n - x_n^k|^2 \right)^{1/2} \leq \varepsilon$

$\Rightarrow\ y - x^k \in \ell_2 \qquad y = \underset{\ell^2}{x^k} + \underset{\ell^2}{(y - x^k)} \Rightarrow y \in \ell_2$

y por (**) $\|y - x^k\| \leq \varepsilon \quad \forall k \geq k_0(\varepsilon)$, c.q.d.