A Cañada

TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS (O principio de la acotación uniforme).

S. Banach, H. Steinhaus, 1.927

MOTIVACIÓN

a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuas t.q. $\exists \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$

f no es necesariamente continua.

<u>Ejemplo</u> $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \dfrac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y analíticas

$|x|<1 \quad f_n(x) \to 0$

$|x|=1 \quad f_n(x) \to 1/2$

$|x|>1 \quad f_n(x) \to 1$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\infty < x < -1 \\ 1/2 & x=-1 \\ 0 & -1<x<1 \\ 1/2 & x=1 \\ 1 & x>1 \end{cases}$$

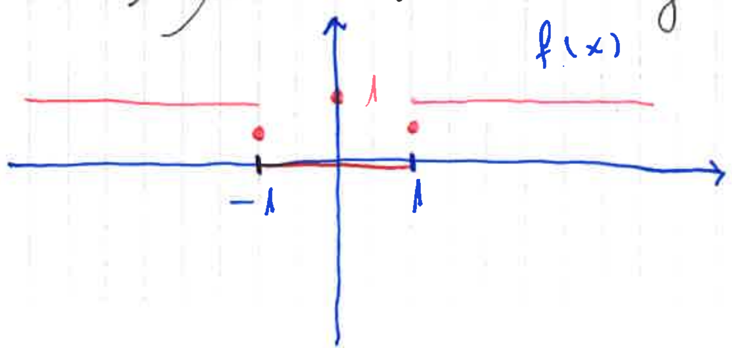
(Véase la gráfica al final de la página)

b) Cuando tengamos $T_n \in \underbrace{\mathcal{L}(E,F)}_{\text{lineal.continua}}$

(E,F) esp. normados, E Banach t.q.

$\forall x \in E \quad \exists \lim_{n\to\infty} T_n(x) \equiv T(x)$

Entonces T es lineal (trivial) y continua (no trivial)



A. Cañada

TEOREMA DE BANACH-STEINHAUS (O Principio de la acotación uniforme)

$(E, \|\cdot\|)$, $(F, \|\cdot\|)$ normados, E Banach

$\{T_i, i \in I\}$ $T_i \in \mathcal{L}(E,F)$ $\forall i \in I$

Si $\sup_{i \in I} \|T_i(x)\| < \infty$, $\forall x \in E$ (tal supremo puede depender de x)

ENTONCES

$$\sup_{i \in I} \|T_i\| \left(= \sup_{i \in I} \left(\sup_{\|e\| \leq 1} \|T_i(e)\| \right) \right) < \infty.$$

<u>Demostración</u>

$\forall n \in \mathbb{N}$, definimos

$$M_n = \{ x \in E : \|T_i(x)\| \leq n, \forall i \in I \}$$

(intersección de cerrados)

M_n es cerrado, $E = \bigcup_{1}^{\infty} M_n$

$\Downarrow$ Baire

Algún M_{n_0} verifica $\operatorname{int}(M_{n_0}) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists \bar{B}(x_0; r) \subset M_{n_0} \Rightarrow$ ¡OJO: no es ya fijo!

~~$\forall y \in \bar{B}(x_0; r)$~~ $\|T_i(y)\| \leq n_0$, $\forall i \in I$

$\forall y \in \bar{B}(x_0; r)$

$\exists K /$

$\Rightarrow \|T_i\| \leq K$, $\forall i \in I$

COROLARIO 1 (¡Quizás el más importante)

E, F e. normados, E Banach

$\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{L}(E,F)$ t.q.

$\forall x \in E \quad \exists \lim_{n\to\infty} T_n(x) \equiv T(x)$

Entonces $T \in \mathcal{L}(E,F)$.

Demostración

$\not{p}$ T B-S $\quad \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| \overset{\equiv M}{<} +\infty$

$$\|T_n(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$\|T(x)\| \leq M\|x\| \quad \forall x \in E. \quad \text{c.q.d.}$$

$$\Downarrow$$

T es continuo (pues T es trivialmente lineal)

y $\|T\| \leq M$.

EN EL TB-S, la hipótesis E completo es necesaria.

Ejemplo

$E = C_{00} = \{\{a_n\}$ / todos los términos, salvo un no finito, son nulos $\}$

$\|\{a_n\}\| = \max_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$

$T_k : E \longrightarrow \mathbb{R} \qquad T_k(\{a_n\}) = \sum_{p=1}^{k} a_p$

a) T_k lineal

b) $|T_k(\{a_n\})| \leq k \|\{a_n\}\|$ $\Big\} \Rightarrow T_k$ continua.

c) $\forall$ $T_k(\{a_n\}) \xrightarrow{k \to +\infty} \sum_{p=1}^{\infty} a_p \equiv T(\{a_n\})$ (la suma es finita)

d) T es claramente lineal

T no es continua, pues

$$T(\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}) = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} \longrightarrow +\infty$$

y en cambio $\|\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}\|_{C_{00}} = 1$.

e) ¡C_{00} no es Banach! ($\exists$ suc. de Cauchy no convergentes)

$\{\{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \ldots, \tfrac{1}{n}, 0, 0, \ldots\}, n \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy

no convergente.

A. Cañada, Análisis Funcional, 2014/15

Aplicación bilineal + separadamente continua $\}$ $\Rightarrow$ Aplicación continua.

MOTIVACIÓN

NOTA 1 $\quad f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to f(x,y)$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

es separadamente continua pero no continua en $(0,0)$ $(y=\lambda x, \lambda \in \mathbb{R})$

$$f(x,\lambda x) = \frac{\lambda x^2}{x^2(1+\lambda^2)} = \frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

Demostremos que si

E, F e. Banach $\quad a: E\times F \to \mathbb{R}$ bilineal t.q.

i) $\forall x \in E$ fijo, la aplicación $\begin{array}{l} F \to \mathbb{R} \\ y \to a(x,y) \end{array}$ es cont.

ii) $\forall y \in F$ fijo, la aplicación $\begin{array}{l} E \to \mathbb{R} \\ x \to a(x,y) \end{array}$ es cont.

Entonces $\exists\, C>0$ t.q. $|a(x,y)| \leq C \|x\| \|y\|$, $\forall x,y \in F$

($\Updownarrow$ a continua)

Consideremos la familia de op. lineales y continuos

$\{T_x : F \to \mathbb{R},\ T_x(y) = a(x,y),\ \forall y \in F,\ \forall x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$

Para cada x fijo, $\|x\|\leq 1$, $T_x : F \to \mathbb{R}$ $<$ lineal; continuo por i)

Ahora, el conjunto $\{T_x(y),\ x \in E,\ \|x\| \leq 1\}$ es acotado $\forall y \in E$ fijo (por ii)

Por el T. B. Steinhaus $\{\|T_x\|,\ x\in E,\ \|x\|\leq 1\}$ es acotado $\Rightarrow$ Ahora, si $\|x\| \leq 1$

$\|T_x\| = \sup_{\|y\|\leq 1} |T_x(y)| = \sup_{\|y\|\leq 1} |T_x(y)|$. Así pues el conjunto

$\{ |a(x,y)|, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \}$ es acotado.

Sea C su supremo $\Rightarrow$

$$|a(x,y)| \leq C \quad \forall x: \|x\| \leq 1, \forall y: \|y\| \leq 1$$

$$\Rightarrow |a(x,y)| \leq C \|x\| \|y\|, \quad \forall x, y \in (E \times F).$$

$\Downarrow$

a continua.

Conviene recordar lo siguiente, que es un resultado similar al caso de aplicaciones lineales, pero para aplicaciones bilineales:

Si $b: E \times F \longrightarrow \mathbb{R}$ es bilineal, entonces

b es continua $\Leftrightarrow \exists M \geq 0 / \ |b(x,y)| \leq M \|x\| \|y\|,$

$\forall (x,y) \in E \times F.$