ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, Examen final, 09/02/2016

1. (2 puntos) Teorema de caracterización de bases hilbertianas en espacios de Hilbert separables de dimensión infinita.

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) (1 punto) Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) (1 punto) Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. (a) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_∞ pero no en l_1 ni en l_2.

   (b) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en l_2 pero no en l_1.

   (c) (1 punto) Poner un ejemplo de una sucesión que converja a cero en c_0 pero no en l_2

4. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <,>)$, con el producto escalar

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ \forall\ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

   (a) (1 punto) Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$ es continuo.

   (b) (1 punto) Demuéstrese que no existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) =< z, \{x_n\} >,\ \forall\ \{x_n\} \in H.$$

   (c) (0.5 puntos) Enúnciese el Teorema de Riesz-Fréchet sobre el dual de espacios de Hilbert H.

   (d) (0.5 puntos) ¿Qué conclusión obtienes a raíz de los tres apartados anteriores?