ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 23/01/2017

1. (a) **(1 punto)** Enúnciese el Lema (Teorema) de Baire (versión sucesión de cerrados).

   (b) **(1 punto)** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Pruébese que cualquier subespacio M de X de dimensión finita es cerrado.

   (c) **(1 punto)** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado. Pruébese que cualquier subespacio propio M de X tiene interior vacío.

   (d) **(1 punto)** Usando los apartados anteriores, pruébese rigurosamente que si X es un espacio normado completo, de dimensión infinita, entonces cualquier base (algebraica) de X es no numerable.

2. Si $(E, \|\cdot\|)$ y $(F, \|\cdot\|)$ son espacios normados y $L : E \to F$ es una aplicación lineal, decídase razonadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   (a) **(1 punto)** Si la dimensión de E es finita, entonces L es continua.

   (b) **(1 punto)** Si la dimensión de F es finita, entonces L es continua.

3. Considérese el espacio $H = (c_{00}, <,>)$, donde

$$< \{x_n\}, \{y_n\} >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \forall \ \{x_n\}, \{y_n\} \in H.$$

   Demuéstrese que el operador lineal $L : H \to \mathbf{R}$, definido como $L(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$

   (a) **(1 punto)** Está bien definido (es decir, $L(\{x_n\}) \in \mathbf{R}, \forall \{x_n\} \in c_{00}$).

   (b) **(1 punto)** Es continuo.

   (c) **(1 punto)** No existe $z \in H$ tal que

$$L(\{x_n\}) =< z, \{x_n\} >, \ \forall \ \{x_n\} \in H \qquad (*)$$

   En relación con el Teorema de Riesz-Frèchet, ¿qué conclusión se obtiene?

   (d) **(1 punto)** Si se sustituye $H = (c_{00}, <,>)$, por el espacio de Hilbert l_2, con el producto escalar usual, demuéstrese que $L : l_2 \to \mathbf{R}$ está bien definido y es lineal y continuo. ¿Se cumple ahora (*)? Si es así, ¿puedes decir quién es el elemento $z \in l_2$ que cumple (*)?