ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 10/07/2017

1. (a) **0.5 puntos)** Enúnciese el teorema de caracterización de aplicaciones lineales y continuas definidas entre espacios normados.

   (b) **(2 puntos)** Usando dicho teorema, pruébese que si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio normado de dimensión infinita, entonces el dual topológico está contenido, estrictamente, en el dual algebraico.

2. Decídase, razonadamente, si las afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas:

   (a) **(1 punto)** Cualquier subconjunto cerrado y acotado de un espacio normado es compacto.

   (b) **(1 punto)** Existen espacios normados tales que cualquier subconjunto cerrado y acotado es compacto.

   (c) **(1 punto)** Existen espacios normados de dimensión infinita con base (algebraica) numerable.

   (d) **(1 punto)** Existen espacios normados completos de dimensión infinita con base algebraica numerable

3. Sea H un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita y $B = \{f_n, n \in \mathbf{N}\}$ un subconjunto ortonormal (no necesariamente base hilbertiana).

   (a) **(3 puntos)** Si λ_n es una sucesión dada de números reales, pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n$ es convergente en H si y solamente si la serie de números reales $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$ es convergente.

   (b) **(0.5 puntos)** Si B es no sólo ortonormal, sino base hilbertiana de H, ¿qué puede afirmarse sobre las series $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n f_n$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n^2$ para el caso en el que $\lambda_n = \langle f, f_n \rangle$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$ con $f \in H$ dado?