ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 9/02/2016. Examen para matrícula de honor

1. (a) Sea X un espacio normado, $X^\sharp$ el dual algebraico y $L \in X^\sharp$. Demuéstrese que $L \in X^*$ (dual topológico) si y solamente si el núcleo de L es cerrado.

   (b) Si X es un espacio normado, $L \in X^\sharp$ (L no idénticamente cero) y $\alpha \in \mathbf{R}$, se define el hiperplano $H(L, \alpha)$ como

   $$H(L, \alpha) = \{x \in X : L(x) = \alpha\}$$

   Demuéstrese que cualquier hiperplano en X es o cerrado o denso.

2. Sea $\{\lambda_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ una sucesión de números reales tal que $\lambda_n \in (0, 1],\ \forall\ n \in \mathbf{N}$. Trivialmente,

   $$< x, y >:= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n,\ \forall\ x = \{x_n\} \in l_2, \forall\ y = \{y_n\} \in l_2 \tag{1}$$

   define un producto escalar en l_2. Demuéstrese que si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n$ es convergente, entonces l_2, con la norma derivada del producto escalar (1), no es completo.

3. Sea $X = (C[0, 1], \| \cdot \|_0)$ y $a(\cdot) \in C[0, 1]$ una función dada. El operador

   $$T : X \to X,\ (Tf)(t) = a(t)f(t),\ \forall\ f \in X,\ \forall\ t \in [0, 1]$$

   es trivialmente lineal y continuo. Demuéstrese que T es compacto si y solamente si la función $a(\cdot)$ es idénticamente cero.