ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 9/11/2016

1. (a) **(0.5 puntos)** Enúnciese el Teorema de Hahn-Banach.

   (b) **(1.5 puntos)** Usando dicho teorema, pruébese rigurosamente lo siguiente:
   Si $(X, \|\cdot\|)$ *es un espacio normado,* G *un subespacio vectorial de* X *y* $g : G \to \mathbf{R}$ *es lineal y continua,*

   ENTONCES: existe algún elemento en el dual topológico de X, *que extiende a* g *y que tiene la misma norma que* g.

2. Sea $X = C([0,1], \mathbf{R})$ con la norma uniforme.

   (a) **(1.5 puntos)** Pruébese que el subconjunto $A = \{f \in X : \int_0^1 f(t)\, dt = 2\}$ es cerrado en X.

   (b) **(1.5 puntos)** Pruébese que el subconjunto

   $$B = \{f \in X : f(0) - f(1/2) + f(1) > 0\}$$

   es abierto en X.

3. Sea $L : l_\infty \to l_1$ definido como

   $$L(x) = L(\{x_n\}) = \left\{\frac{x_n}{n^2}\right\},\ \forall\, x \in l_\infty$$

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1.5 puntos)** Calcúlese la norma de L, demuéstrese que la misma se alcanza y encuéntrense todos los elementos de $\overline{B}_{l_\infty}(0;1)$ en los que se alcanza dicha norma.

4. Sea $L : c_0 \to l_1$ definido como

   $$L(x) = L(\{x_n\}) = \left\{\frac{x_n}{n^3}\right\},\ \forall\, x \in c_0$$

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1.5 puntos)** Calcúlese la norma de L y demuéstrese que la misma no se alcanza