ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 20/01/2016

1. (a) (0.5 puntos) Enunciado del Teorema de la proyección ortogonal para el caso de un subespacio cerrado M de un espacio de Hilbert H.

   (b) (2 puntos) Enunciado y demostración del Teorema de representación de Riesz-Frèchet (dual topológico de un espacio de Hilbert).

2. (a) (1 punto) Sea $(X, \| \cdot \|)$ un espacio normado prehilbertiano (su norma deriva de un producto escalar). Enúnciese y pruébese la identidad del paralelogramo.

   (b) Decídase razonadamente cuáles de los espacios normados que se indican a continuación son espacios prehilbertianos:

      i. (1 punto) $X = C([a, b], \mathbf{R})$ con la norma $\|f\|_0 = \max\limits_{t\in[a,b]} |f(t)|, \forall\ f \in X$.

      ii. (1 punto) $X = \{f \in C^1([a, b], \mathbf{R}) : f(a) = 0\}$, con la norma

$$\|f\| = \int_a^b |f'(t)|^2\ dt,\ \forall\ f \in X.$$

3. Sea $(H, < \cdot, \cdot >)$ un espacio de Hilbert, separable y de dimensión infinita.

   (a) (1 punto) Defínase con precisión el concepto de base hilbertiana ortonormal, enunciando el teorema de caracterización de bases hilbertianas.

   (b) (2 puntos) Usando el apartado anterior, pruébese razonadamente que un subconjunto ortonormal $B = \{f_n,\ n \in \mathbf{N}\}$ de H, es base hilbertiana si y solamente si se cumple la condición siguiente:

$$\forall\ f, g \in H,\ < f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n >< g, f_n >$$

   (se puede usar el hecho de que el producto escalar es continuo).

   (c) (1.5 puntos) A raíz de lo anterior, ¿qué conclusión obtienes sobre la relación que existe entre cualquier espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H y el espacio de Hilbert l_2?

   Sugerencia. Se puede usar el resultado siguiente: Si $\{\lambda_n\}$ es un sucesión de números reales, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente si y solamente si $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2$ es convergente.