ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 13/01/2017

1. **(2.5 puntos)** Dual de un espacio de Hilbert (Enunciado y demostración del Teorema de representación de Riesz-Fréchet)

2. (a) **(1.5 puntos)** ¿Es $\mathbf{R}^3$ con la norma $\|x\| = |x_1|+|x_2|+|x_3|$, $\forall\, x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, un espacio prehilbertiano? Razónese adecuadamente la respuesta.

   (b) **(1.5 puntos)**¿Sea $X = \{f \in C^2([0,1], \mathbf{R}), f(0) = f(1) = 0\}$ ¿Es X con la norma $\|f\| = \left(\int_0^1 |f''(t)|^2\, dt\right)^{1/2}$, $\forall f \in X$, un espacio prehilbertiano? Si la respuesta es afirmativa, escríbase el producto escalar del que deriva tal norma. Razónese adecuadamente la respuesta.

   (c) **(1.5 puntos)** Sea B una base hilbertiana de un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita H. Demuéstrese que ningún subconjunto propio D de B (es decir $D \subset B, D \neq B$) es base hilbertiana de H.

3. **(3 puntos)** Considérese el espacio vectorial l_2 con el producto escalar

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n y_n}{n},\ \forall\ x = \{x_n\} \in l_2,\ \forall\ y = \{y_n\} \in l_2$$

   Pruébese que, con la norma derivada del anterior producto escalar, la sucesión:

$$\begin{aligned}
&X^1 = (1, 0, 0, ...)\\
&X^2 = (1, 1/\sqrt{2}, 0, 0, ...)\\
&\ldots\\
&X^k = (1, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{3}, \ldots, 1/\sqrt{k}, 0, 0, ...)\\
&\ldots
\end{aligned}$$

   es de Cauchy pero no convergente.