ANÁLISIS FUNCIONAL, GRADO EN MATEMÁTICAS

Tercer curso, 16/09/2016

1. (a) **(2 puntos)** Enunciado y demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz en un espacio prehilbertiano.

   (b) **(0.5 puntos)** Escríbase y demuéstrese una condición necesaria y suficiente para tener la igualdad en la desigualdad anterior.

   (c) **(0.5) puntos** Usando los apartados anteriores, pruébese que si en un espacio vectorial real X, tenemos definido un producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle$, entonces $\langle x, x \rangle^{1/2}$, $\forall\ x \in X$, define una norma en X.

2. Sean $X = \{u : [0,1] \to \mathbf{R} : u \text{ es continua}, u(1) = 0\}$ con la norma uniforme $\| \cdot \|_0$ y el funcional $L : X \to \mathbf{R}$ definido como $L(u) = \int_0^1 u(t)\ dt,\ \forall\ u \in X$.

   (a) **(1 punto)** Demuéstrese que L es lineal y continuo.

   (b) **(1 punto)** Calcúlese la norma de L en X^*

   (c) **(1 punto)** ¿Se alcanza dicha norma?

3. (a) **(1 punto)** Enúnciese el Teorema de representación de Riesz-Fréchet sobre el dual de un espacio de Hilbert.

   (b) **(1.5 puntos)** Sea P_n el espacio vectorial real de los polinomios de una variable, de grado menor o igual que n, con el producto escalar

   $$< p, q >= \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ dt,\ \forall\ p, q \in P_n$$

   Pruébese que si $L : P_n \to \mathbf{R}$ es una aplicación lineal, entonces L es continua.

   (c) **(1.5) puntos** Como consecuencia de los dos apartados anteriores, pruébese que si $a < b$ son números reales dados, entonces existe un único $p \in P_n$ tal que

   $$\int_a^b q(t)\ dt = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\ dt,\ \forall\ q \in P_n$$